

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \varphi(0) = 1.$$

1. L'application φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx$ existe.

3. On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration

1. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\varphi(x)| dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Posons $t = x - n\pi$:

$$u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(t + n\pi)|}{t + n\pi} dt$$

On a :

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

D'où :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \int_0^{m\pi} |\varphi(x)| dx = \sum_{n=0}^{m-1} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

Et comme la série harmonique diverge, on en déduit que φ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Cependant, une intégration par parties donne :

$$\int_0^a \varphi(x) dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \psi(x) dx = a\psi(a) + \int_0^a \psi(x) dx$$

$$(\text{On a posé : } u(x) = \frac{1}{x} ; v'(x) = \sin x \text{ et on a choisi } v(x) = 1 - \cos x)$$

(On rappelle que l'application $\delta : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par $\delta(0) = 0$)

Or, l'application $\psi : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0 par $\psi(0) = \frac{1}{2}$ donc est localement

intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |\psi(x)| \leq \frac{2}{x^2}$$

On en déduit que ψ est bien intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc (continuité sur $[0, 1]$) sur $\mathbb{R}_+$, d'où :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \psi(x) dx \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Et comme $\lim_{a \rightarrow +\infty} a\psi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \delta(a) = 0$, on a bien :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(x) dx \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Moralité : φ est non intégrable mais son intégrale impropre converge.

3. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Étape 1

On considère l'application f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

Montrons que f se prolonge par continuité en 0 :

On a, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^3)} = \left(-\frac{x}{6} + o(x^2)\right)(1 + o(x)) = -\frac{x}{6} + o(x^2)$$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Remarques :

- on a alors $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6} + o(x)$, d'où l'on déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

- En écrivant $f(x) = \frac{\frac{\sin x - x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}$, on peut montrer à l'aide du quotient de deux séries entières que le

prolongement de f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Étape 2

On pose :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$$

Calculons J_n

Précisons au préalable que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2n+1$, donc J_n est bien définie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sin[(2n+1)x] - \sin[(2n-1)x] = 2\cos(2nx)\sin x$

D'où : $J_n - J_{n-1} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx) dx = 0$

On en déduit que la suite (J_n) est constante et :

$$J_n = J_0 = \frac{\pi}{2}$$

Autre méthode plus longue : on calcule le noyau de Dirichlet :

Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = e^{\frac{int}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}}$$

Posons $t = 2x$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx} \right) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} + \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1$$

Et en intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx = 2 \sum_{k=0}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx) dx - \frac{\pi}{2}$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx) dx = \left[\frac{\sin(2kx)}{2k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(k\pi)}{2k} = 0$$

D'où :

$$J_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Étape 3

On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{x} dx$$

Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Tout comme J_n , K_n est bien définie. Posons $t = (2n+1)x$. Ainsi :

$$K_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$$

On a vu que l'intégrale ci-dessus admet une limite lorsque n tend vers l'infini, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Étape 4 : lemme de Lebesgue pour les applications continues

Supposons $f = 1$ sur $[a, b]$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda b} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons f en escalier sur $[a, b]$. Alors, si $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{[a_{i-1}, a_i[}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} e^{i\lambda t} dt$$

D'où, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{i=1}^n \lambda_i \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons enfin f continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ pour la norme uniforme, il existe $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que :

$$\|f - e\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

Écrivons :

$$f = (f - e) + e$$

Or, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} (f(t) - e(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - e(t)| dt \leq \|f - e\|_{\infty} (b - a) \leq \varepsilon (b - a)$$

Et d'autre part, comme e est en escalier, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

C'est-à-dire : $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, (\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow \left| \int_a^b e^{i\lambda t} e(t) dt \right| \leq \varepsilon)$

On en déduit que pour tout λ tel que $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, on a :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \varepsilon (b - a) + \varepsilon$$

Ce qui signifie bien :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

Remarques :

- Ce raisonnement fonctionne encore si on suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$.
- Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, une simple intégration par parties suffit à prouver le lemme.
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, le passage à la partie réelle et à la partie imaginaire donne :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(\lambda t) f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0$$

Étape 5 : conclusion

On a :
$$K_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin[(2n+1)x] dx$$

Comme f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a d'après le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n - J_n) = 0$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$