

Propriété

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue et positive sur I .

$$\text{Si } \int_a^b f(t) dt = 0 \text{ alors } f = 0 \text{ sur } I.$$

Démonstration :

Par l'absurde. Supposons :

$$\exists \alpha \in I : f(\alpha) > 0$$

Comme f est continue en α , on a :

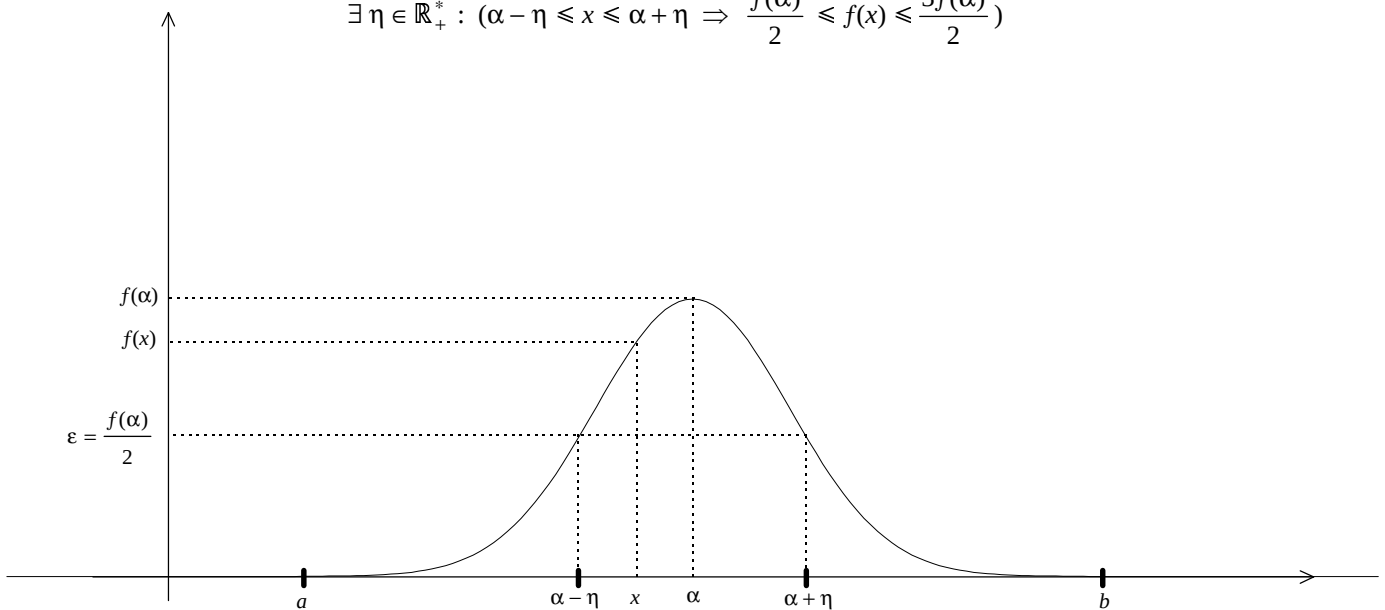
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : (x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta] \Rightarrow f(x) \in [f(\alpha) - \varepsilon, f(\alpha) + \varepsilon])$$

En particulier, pour $\varepsilon = \frac{f(\alpha)}{2} > 0$:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : (x \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta] \Rightarrow f(x) \in [\frac{f(\alpha)}{2}, \frac{3f(\alpha)}{2}])$$

C'est-à-dire :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : (\alpha - \eta \leq x \leq \alpha + \eta \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3f(\alpha)}{2})$$



Posons $u = \max(a ; \alpha - \eta)$ et $v = \min(\alpha + \eta ; b)$. On a ainsi : $u < v$. (Car l'ensemble $\{a ; \alpha - \eta\}$ est majoré par α et l'ensemble $\{\alpha + \eta ; b\}$ est minoré par α et l'un des deux au moins l'est strictement)

Soit $x \in [u, v]$. Ainsi :

$$\frac{f(\alpha)}{2} \leq f(x)$$

Intégrons cette inégalité entre u et v . Comme $u < v$, il vient :

$$\frac{f(\alpha)}{2} (v - u) \leq \int_u^v f(x) dx$$

Le membre de gauche de cette inégalité est strictement positif :

$$0 < \frac{f(\alpha)}{2}(v-u) \text{ (car } f(\alpha) > 0 \text{ par hypothèse et } u < v)$$

Étudions le membre de droite :

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^v f(x) dx + \int_v^b f(x) dx$$

Donc :

$$\int_a^b f(x) dx - \int_u^v f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_v^b f(x) dx$$

Et comme f est positive sur I , elle l'est sur $[a, u]$ et sur $[v, b]$. D'où

$$\int_a^b f(x) dx - \int_u^v f(x) dx \geq 0$$

Donc :

$$\int_u^v f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Bilan :

On peut finalement écrire :

$$0 < \frac{f(\alpha)}{2}(v-u) \leq \int_u^v f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

C'est à dire :

$$0 < \int_a^b f(x) dx$$

Ce qui contredit l'hypothèse $\int_a^b f(t) dt = 0$.

La propriété est donc démontrée.

Remarques : les hypothèses

H1 : f continue sur I

H2 : f positive sur I

sont nécessaires.

En effet :

Si H1 n'est pas vérifiée, en choisissant f nulle sur I sauf en $\frac{1}{2}(a+b)$ on a $\int_a^b f(t) dt = 0$ et f non identiquement nulle sur I .

Si H2 n'est pas vérifiée, il suffit de choisir une fonction impaire (et non identiquement nulle) sur un intervalle I centré en 0 (par exemple $f = \sin$ sur $[-\pi, \pi]$) pour avoir $\int_a^b f(t) dt = 0$ et f non identiquement nulle sur I .

Cependant, l'hypothèse H1 peut être affaiblie en la remplaçant par :

H1 faible : f est continue par morceaux sur I et est égale

à sa régularisée $\tilde{f}$ sur I .

On appelle régularisée de f
l'application notée $\tilde{f}$ définie par :
 $\forall t \in [a, b] : \tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$

On obtient alors une extension de la propriété :

Propriété étendue

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et positive sur I . On suppose de plus que : $f = \tilde{f}$ sur I .

$$\text{Si } \int_a^b f(t) dt = 0 \text{ alors } f = 0 \text{ sur } I.$$

Démonstration :

Soit $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ une subdivision adaptée à f . Cela signifie :

- $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$
- $\forall i \in \{0 ; \dots ; m - 1\}$, la restriction de f à $]t_i, t_{i+1}[$ est continue et admet des limites finies en t_i^+ et t_{i+1}^- .

Par la relation de Chasles, on a :

$$0 = \int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt$$

Or, une somme de quantités positives est nulle si et seulement si chacune de ces quantités sont nulles :

$$\forall i \in \{0 ; \dots ; m - 1\} : \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt = 0$$

Et comme f est continue sur $]t_i, t_{i+1}[$, on a, d'après la propriété initiale :

$$\forall i \in \{0 ; \dots ; m - 1\} : f = 0 \text{ sur }]t_i, t_{i+1}[$$

Donc f est nulle sur $[a, b]$ **sauf** peut-être en les t_i . ($0 \leq i \leq m - 1$)

Mais, comme f est égale à sa régularisée $\tilde{f}$, on a :

$$\forall i \in \{0 ; \dots ; m - 1\} : f(t_i) = \frac{1}{2} (f(t_i^+) + f(t_i^-))$$

Or, $f(t_i^+) = f(t_i^-) = 0$ puisque $f = 0$ sur $]t_i, t_{i+1}[$.

$$\text{Donc : } f(t_i) = 0$$

$$\text{Et finalement : } f = 0 \text{ sur } [a, b]$$

Exercice :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, continue telle que :

$$\int_a^b f^2(t) dt = \int_a^b f^3(t) dt = \int_a^b f^4(t) dt$$

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$ sur $[a, b]$.

L'idée est de calculer :

$$\int_a^b (f^2 - f)^2(t) dt = \int_a^b f^4(t) dt - 2 \int_a^b f^3(t) dt + \int_a^b f^2(t) dt = 0$$

De plus, $(f^2 - f)^2$ est continue et positive sur $[a, b]$. Donc :

$$(f^2 - f)^2 = 0 \text{ sur } [a, b]$$

$$f(f - 1) = 0 \text{ sur } [a, b]$$

$$f(t)(f(t) - 1) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

$$f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1 \quad \forall t \in [a, b]$$

On a donc :

$$f([a, b]) \subset \{0 ; 1\}$$

Or, f étant continue, l'image d'un segment est un segment. Donc :

$$f([a, b]) = \{0\} \text{ ou } f([a, b]) = \{1\}$$

Ce qui signifie :

$$f = 0 \text{ ou } f = 1 \text{ sur } [a, b]$$