

FORMULE D'INVERSION DE PASCAL

Soient $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ des familles d'éléments d'un anneau commutatif A tels que :

$$a_p = \sum_{k=0}^p C_p^k b_k \quad \forall p \in [0, n]$$

Alors :

$$b_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k a_k \quad \forall p \in [0, n]$$

Preuve par récurrence :

On considère la propriété $\wp(p)$ suivante définie pour $p \in [0, n]$:

$$\wp(p) : b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in [0, p]$$

- D'après la relation $a_p = \sum_{k=0}^p C_p^k b_k$ particularisée avec $p = 0$, on obtient : $a_0 = b_0$. D'où $\wp(0)$.
- Montrons que : $\forall p \in [0, n-1], \wp(p) \Rightarrow \wp(p+1)$

Soit $p \in [0, n-1]$. Supposons donc : $b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in [0, p]$

Nous savons que :

$$a_{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} C_{p+1}^j b_j = \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j b_j + b_{p+1}$$

D'où :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j b_j$$

Et d'après notre hypothèse :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k$$

Nous pouvons modifier l'ordre des sommations (tenant compte des conditions : $0 \leq k \leq j \leq p$) :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p \sum_{j=k}^p (-1)^{j-k} C_{p+1}^j C_j^k a_k$$

Or : $C_{p+1}^j C_j^k = \frac{(p+1)!}{j!(p+1-j)!} \times \frac{j!}{k!(j-k)!} = \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} \times \frac{(p+1-k)!}{(p+1-j)!(j-k)!} = C_{p+1}^k C_{p+1-k}^{p+1-j}$

D'où :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p C_{p+1}^k a_k \sum_{j=k}^p (-1)^{j-k} C_{p+1-k}^{p+1-j}$$

Or, par translation d'indice de sommation :

$$\sum_{j=k}^p (-1)^{j-k} C_{p+1-k}^{p+1-j} = \sum_{j=0}^{p-k} (-1)^j C_{p+1-k}^{p+1-k-j}$$

Et comme : $C_{p+1-k}^{p+1-k-j} = C_{p+1-k}^j$, on déduit :

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p C_{p+1}^k a_k \sum_{j=0}^{p-k} (-1)^j C_{p+1-k}^j$$

$$b_{p+1} = a_{p+1} - \sum_{k=0}^p C_{p+1}^k a_k \left(\sum_{j=0}^{p+1-k} (-1)^j C_{p+1-k}^j - (-1)^{p+1-k} \right)$$

Et d'après la formule du binôme : $\sum_{j=0}^{p+1-k} (-1)^j C_{p+1-k}^j = 0$ d'où :

$$b_{p+1} = a_{p+1} + \sum_{k=0}^p (-1)^{p+1-k} C_{p+1}^k a_k$$

$$b_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} C_{p+1}^k a_k$$

On a donc :

$$b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in \llbracket 0, p+1 \rrbracket$$

C'est-à-dire $\wp(p+1)$.

On en déduit, d'après le principe de récurrence :

$$\wp(p), \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Et en particulier $\wp(n)$:

$$b_j = \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} C_j^k a_k \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Ce qui achève la démonstration.

Preuve en inversant la matrice des coefficients binomiaux :

Notons $A_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. La relation $a_p = \sum_{k=0}^p C_p^k b_k \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ se traduit alors matriciellement par :

$$A_n = M_n B_n \text{ avec } M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

Les matrices M_n sont triangulaires, de déterminant 1, donc inversibles. En inversant M_n , on déduira une expression des b_p ($0 \leq p \leq n$) en fonction des a_p ($0 \leq p \leq n$). Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = M_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+X \\ (1+X)^2 \\ \vdots \\ (1+X)^n \end{pmatrix}$$

Pour déterminer M_n^{-1} , on décompose X^p ($0 \leq p \leq n$) dans la base $(1, (1+X), (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$:

Pour cela, il suffit d'écrire :

$$X^p = (1+X-1)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k (-1)^{p-k} (1+X)^k$$

D'où :

$$M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ (-1)^n C_n^0 & (-1)^{n-1} C_n^1 & (-1)^{n-2} C_n^2 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$$

En conséquence :

$$b_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k a_k \quad \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Exemple : démontrer :

$$\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} C_p^k 2^k = 1$$

Application 1 : nombre de surjections d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal p .

Soit X un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et Y un ensemble de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$.

On note $S(n, p)$ le nombre de surjections de X sur Y .

Recherchons une expression de $S(n, p)$.

Pour cela, dénombrons de deux façons différentes le nombre d'applications f de X dans Y .

Soit f une application de X dans Y .

Pour chacun des n éléments de X , nous pouvons associer l'un des p éléments de Y . D'après le principe multiplicatif, nous avons donc p^n façons de construire f .

Nous pouvons dénombrer différemment : on sait que f définit une surjection de X sur $f(X)$. Notons k le cardinal de $f(X)$. On a donc : $1 \leq k \leq p$. Nous avons C_p^k façons de choisir les k éléments de $f(X)$ parmi les p éléments de Y . Et, avec nos notations, nous avons $S(n, k)$ façons de choisir une surjection de X dans un ensemble de cardinal k . En sommant, pour $1 \leq k \leq p$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^p C_p^k S(n, k) \text{ applications de } X \text{ dans } Y.$$

Bilan :

$$p^n = \sum_{k=1}^p C_p^k S(n, k)$$

D'après la formule d'inversion de Pascal, on déduit :

$$S(n, p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} C_p^k k^n$$

Application 2 : nombre de dérangements d_n d'un ensemble X de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. (Est appelé dérangement de X toute bijection de X n'ayant aucun point fixe)

Soit $B_k(X)$ l'ensemble des bijections de X ayant k points fixes (pour $0 \leq k \leq n$)

On a :

$$\text{Card}(B_k(X)) = C_n^{n-k} d_{n-k}$$

En effet, une bijection de X ayant k points fixes dérange $n - k$ éléments de X . Or, il y a C_n^{n-k} façons de choisir les $n - k$ éléments dérangés et d_{n-k} dérangements de l'ensemble de ces $n - k$ éléments.

En sommant, pour $k = 0$ à n :

$$\sum_{k=0}^n \text{Card}(B_k(X)) = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k$$

En outre,

$$\sum_{k=0}^n \text{Card}(B_k(X)) = n!$$

On a donc :

$$n! = \sum_{k=0}^n C_n^k d_k$$

Et d'après la formule d'inversion de Pascal :

$$d_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ce résultat a pour conséquence un curieux théorème dit "des chapeaux" (d'autres versions existent) :

n invités laissent leur chapeau au vestiaire et repartent en prenant un chapeau au hasard. La probabilité p_n qu'ils repartent tous avec un chapeau ne leur appartenant pas est :

$$p_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Par exemple, $p_4 = \frac{3}{8}$. (On peut retrouver ce résultat à l'aide d'un arbre)

Et lorsque n tend vers l'infini, p_n tend vers $\frac{1}{e}$.