

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Il s'agit des polynômes suivants :  $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  et  $\ell_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$

**0. Calcul de  $L_n$  et  $\ell_n$  pour  $n \in [0, 5]$**

$$L_0(x) = 1$$

$$\ell_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$\ell_1(x) = 2x$$

$$L_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\ell_2(x) = 12 x^2 - 4$$

$$L_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

$$\ell_3(x) = 96 x^3 - 72x$$

$$L_4(x) = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8}$$

$$\ell_4(x) = 1680 x^4 - 1440 x^2 + 144$$

$$L_5(x) = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x$$

$$\ell_5(x) = 30240 x^5 - 33600 x^3 + 7200x$$

**1. Degré, parité et coefficient principal de  $L_n$**

Écrivons :

$$(x^2 - 1)^n = x^{2n} + Q_{2n-2}(x)$$

où

$Q_{2n-2}$  est un polynôme pair de degré  $2n - 2$

Ainsi, il apparaît :

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{n!} x^n + R_{n-2}(x)$$

où

$R_{n-2}$  est de degré  $n - 2$  de même parité que  $n$

On peut donc affirmer :

Le degré de  $L_n$  est  $n$ , sa parité est celle de  $n$  et son coefficient dominant est  $\frac{1}{2^n n!} \times \frac{(2n)!}{n!} = \frac{C_{2n}^n}{2^n}$

**2. Racines de  $L_n$**

Soit  $k \in [0, n]$ . Posons  $M_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n$  et  $\wp(k)$  la propriété suivante :

$\wp(k)$  :  $M_k$  admet 1 et  $-1$  comme racines de multiplicité  $n - k$  et  $k$  racines simples distinctes dans  $] -1, 1[$

- $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$  d'où  $\wp(0)$ .
- Montrons, pour tout  $k \in [0, n - 1]$ , que :  $\wp(k) \Rightarrow \wp(k + 1)$

Notons  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) les  $k$  racines simples de  $M_k$  avec la convention :  $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 1$ .

Posons également  $\lambda_0 = -1$  et  $\lambda_{k+1} = 1$ .

L'application  $M_k$  est polynomiale, donc continue sur  $[-1, 1]$  et dérivable sur  $] -1, 1[$ .

De plus, pour tout  $j \in [0, k]$ , on a :  $M_k(\lambda_j) = M_k(\lambda_{j+1}) = 0$ .

D'après le théorème de Rolle, appliqué à  $M_k$  sur chacun des intervalles  $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$  ( $0 \leq j \leq k$ ), on obtient :

$$\exists \mu_j \in ]\lambda_j, \lambda_{j+1}[ \text{ tel que : } M_{k+1}(\mu_j) = 0$$

$M_{k+1}$  admet donc  $k + 1$  racine simples dans  $] -1, +1[$ .

En outre, 1 et  $-1$  sont des racines de  $M_{k+1}$  de multiplicité  $n - k - 1$  (puisque  $M_{k+1}$  est la dérivée de  $M_k$ )

On a donc  $\wp(k + 1)$ .

On a donc, d'après le principe de raisonnement par récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \wp(k)$$

En particulier, on a  $\wp(n)$  :

$$M_n \text{ et donc } L_n \text{ admet } n \text{ racines simples distinctes dans } ] -1, 1[$$

### 3. Calcul de $L_n(1)$ et $L_n(-1)$

Écrivons : 
$$(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$$

D'après la formule de Leibnitz :

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x - 1)^n (x + 1)^n] = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k}{dx^k} (x - 1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x + 1)^n$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , on a : 
$$\frac{d^k}{dx^k} (x - 1)^n = 0 \text{ pour } x = 1$$

Et : 
$$\frac{d^n}{dx^n} (x - 1)^n = n!$$

On en déduit : 
$$\frac{d^n}{dx^n} [(x - 1)^n (x + 1)^n] = n! 2^n$$

D'où : 
$$L_n(1) = 1$$

Et comme  $L_n$  a la parité de  $n$  : 
$$L_n(-1) = (-1)^n$$

### 4. Orthogonalité de la suite $(L_n)$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ .

Soient  $m \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose :  $m \leq n$ .

On considère, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la propriété :

$$\wp(k) : \langle \ell_m, \ell_n \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t^2 - 1)^n \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2 - 1)^m dt$$

- Par définition du produit scalaire ci-dessus, on a :

$$\langle \ell_m, \ell_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m dt \text{ d'où } \wp(0)$$

- Montrons que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  :  $\wp(k) \Rightarrow \wp(k + 1)$

Par une IPP, on obtient, avec  $u(t) = \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2 - 1)^m$  et  $v'(t) = \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t^2 - 1)^n$

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t^2-1)^n \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2-1)^m dt = \left[ \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2-1)^m \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} (t^2-1)^n \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} (t^2-1)^n \frac{d^{m+k+1}}{dt^{m+k+1}} (t^2-1)^m dt$$

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t^2-1)^n \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2-1)^m dt = \left[ \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2-1)^m M_{n-k-1}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} (t^2-1)^n \frac{d^{m+k+1}}{dt^{m+k+1}} (t^2-1)^m dt$$

Or,  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , donc  $n-k-1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Et alors d'après [2],  $M_{n-k-1}$  admet 1 et -1 comme racines.

Dans tous les cas (ou tous les  $k$ ...) le crochet est nul.

Nous avons donc :

$$\langle \ell_m, \ell_n \rangle = (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} (t^2-1)^n \frac{d^{m+k+1}}{dt^{m+k+1}} (t^2-1)^m dt$$

C'est-à-dire  $\mathcal{O}(k+1)$ .

$$\text{On en déduit : } \langle \ell_m, \ell_n \rangle = (-1)^k \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t^2-1)^n \frac{d^{m+k}}{dt^{m+k}} (t^2-1)^m dt \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$\text{En particulier, pour } k=n, \text{ on obtient : } \langle \ell_m, \ell_n \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2-1)^m dt$$

$$\text{Lorsque } m < n, \text{ on a } \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2-1)^m = 0 \text{ et donc } \langle \ell_m, \ell_n \rangle = 0$$

**Les suites  $(\ell_n)$  et  $(L_n)$  sont donc orthogonales (et donc forment une base de  $\mathbb{R}[X]$ )**

Conséquence : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a :  $\langle L_n, X^k \rangle = 0$ .

(Il suffit de décomposer l'élément  $X^k$  de  $\mathbb{R}_k[X]$  sur la base  $(L_0; L_1; \dots; L_k)$ , puis d'utiliser la bilinéarité)

## 5. Norme de $L_n$ .

D'après la relation  $\langle \ell_m, \ell_n \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2-1)^n \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}} (t^2-1)^m dt$  appliquée maintenant avec  $n=m$ , on a :

$$\langle \ell_n, \ell_n \rangle = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$$

$$\text{Et comme : } \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \text{ (voir intégrales de Wallis)}$$

$$\text{On obtient finalement : } \|\ell_n\|^2 = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1} \text{ et } \|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

$$\text{On a donc : } \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

**6.  $L_n$  est solution de l'équation différentielle  $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$**

6a. On considère l'endomorphisme :  $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$

$$P \mapsto (1-X^2)P'' - 2XP'$$

Montrons que  $\phi$  est un endomorphisme symétrique :

Pour tous  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ , on a :

$$\langle \phi(P) ; Q \rangle = \int_{-1}^1 [(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x)]Q(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)P''(x)Q(x) dx - \int_{-1}^1 2xP'(x)Q(x) dx$$

Par une IPP, la première intégrale donne avec  $u'(x) = P''(x)$  et  $v(x) = (1-x^2)Q(x)$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)P''(x)Q(x) dx = [(1-x^2)P'(x)Q(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P'(x)(-2x)Q(x) dx - \int_{-1}^1 P'(x)(1-x^2)Q'(x) dx$$

Le crochet est clairement nul, d'où :

$$\langle \phi(P) ; Q \rangle = - \int_{-1}^1 P'(x)(1-x^2)Q'(x) dx$$

Cette dernière expression étant symétrique en  $P$  et  $Q$ , il vient :  $\langle \phi(P) ; Q \rangle = \langle P ; \phi(Q) \rangle$

6b. Montrons que  $\deg(\phi(L_n)) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $n = \deg(P)$

Si  $P = 0$  (et donc  $\deg(P) = -\infty$ ) alors  $\phi(P) = 0$  (et donc  $\deg(\phi(P)) = -\infty$ )

Si  $n = 0$  alors  $\phi(P) = 0$  (et donc  $\deg(\phi(P)) = -\infty$ )

Si  $n = 1$  alors  $\phi(P) = -2XP' \in \mathbb{R}_1[X]$  donc  $\deg(\phi(P)) = 1$ .

Si  $n \geq 2$ . Notons  $P = a_n X^n + Q_{n-1}$  où  $a_n \neq 0$  et  $Q_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

$$\text{On a : } P' = na_n X^{n-1} + Q'_{n-1} \text{ et } P'' = n(n-1)a_n X^{n-2} + Q''_{n-1}$$

$$\text{Donc } (1-X^2)P'' - 2XP' = [-n(n-1)a_n - 2na_n] X^n + R_{n-1} \text{ où } R_{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

$$\text{Or, } -n(n-1)a_n - 2na_n = -na_n(n+1) \text{ est non nul (car } n \geq 2 \text{ et } a_n \neq 0).$$

$$\text{Donc } \deg(\phi(P)) = n.$$

Bilan : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X] : \deg(\phi(P)) = \deg(P)$ .

On a vu, en [1] que  $\deg(L_n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a donc :  $\deg(\phi(L_n)) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

6c. Montrons que :  $\langle \phi(L_n) ; P \rangle = 0$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

Comme  $\phi$  est un endomorphisme symétrique :  $\langle \phi(L_n) ; P \rangle = \langle L_n ; \phi(P) \rangle$

Or, d'après [6b],  $\phi(P)$  est de degré  $n-1$ .

Et comme, d'après [4],  $(L_n)$  est orthogonale :  $\langle L_n ; P \rangle = 0$ .

6d. Montrons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , qu'il existe  $\lambda_n \in \mathbb{R}$  tel que :  $\phi(L_n) = \lambda_n L_n$ .

Puisque  $\phi(L_n)$  est de degré  $n$ , on peut écrire, en le décomposant sur la base  $(L_0 ; L_1 ; \dots ; L_n)$  :

$$\phi(L_n) = \lambda_n L_n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j L_j$$

Montrons que les  $\lambda_j$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) sont nuls :

D'après [6c], pour tout  $k \in \llbracket 0 ; n-1 \rrbracket : \langle \phi(L_n) ; L_k \rangle = 0$ .

$$\text{Or, } \langle \phi(L_n) ; L_k \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^n \lambda_j L_j ; L_k \right\rangle = \sum_{j=0}^n \lambda_j \langle L_j ; L_k \rangle = \lambda_k \|L_k\|$$

Donc  $\lambda_k = 0$ .

$$\text{D'où : } \phi(L_n) = \lambda_n L_n$$

6e. Calculons  $\lambda_n$ .

Si  $n = 0$  alors on a :  $L_0 = 1$ ,  $\phi(L_0) = \phi(1) = 0$  donc  $\lambda_0 = 0$ .

Si  $n = 1$  alors on a :  $L_1 = X$ ,  $\phi(L_1) = \phi(X) = -2X$  donc  $\lambda_1 = -2$ .

Si  $n \geq 2$  alors on a, en posant comme en [6b],  $L_n = a_n X^n + Q_{n-1}$  :  $\phi(L_n) = [-n(n-1)a_n - 2na_n] X^n + R_{n-1}$ .

$$\text{Donc } \lambda_n = -n(n-1) - 2n = -n(n+1).$$

Bilan : pour tout  $n \in \mathbb{N} : \lambda_n = -n(n+1)$

6f. Conclusion.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\phi(L_n) + n(n+1) L_n = 0$

Donc  $L_n$  est bien solution de l'équation différentielle :  $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

Autre méthode utilisant la formule de Leibniz :

$$\text{On pose : } Q_n(x) = (x^2 - 1)^n$$

$$\text{On remarque alors que : } (x^2 - 1)Q'_n(x) = 2nxQ_n(x)$$

Puis, on dérive  $n+1$  fois avec la formule de Leibniz.