

Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est stochastique suivant les lignes si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \in [0 ; 1] \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

On dit que M est stochastique suivant les colonnes si ${}^tM$ l'est suivant les lignes.

Propriété 1

Soit M une matrice stochastique. Alors $1 \in \text{Sp}(M)$

Démonstration :

Supposons M stochastique suivant les lignes.

On a alors

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc 1 est valeur propre de M associée au vecteur propre $X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si M est stochastique suivant les colonnes alors, d'après ce qui précède : $1 \in \text{Sp}({}^tM)$

Or, on rappelle que :

$$\chi_{{}^tM}(\lambda) = \det({}^tM - \lambda I) = \det({}^t(M - \lambda I)) = \det(M - \lambda I) = \chi_M(\lambda)$$

Donc :

$$\text{Sp}(M) = \text{Sp}({}^tM)$$

D'où :

$$1 \in \text{Sp}(M)$$

Propriété 2

Le produit de matrices stochastiques est stochastique.

Démonstration :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques suivant les lignes.

Notons $C = (c_{ij})$ le produit AB .

On sait que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Or, a_{ik} et b_{kj} sont dans $[0 ; 1]$, d'où :

$$0 \leq c_{ij} \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}$$

Et comme $\sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$:

$$0 \leq c_{ij} \leq 1$$

De plus :

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \sum_{j=1}^n b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times 1 = 1$$

Donc $C = AB$ est bien stochastique suivant les lignes.

Remarque :

On a vu que $X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et de B pour la valeur propre 1.

On a alors : $CV = ABV = AV = V$

Donc X est aussi un vecteur propre de C pour la valeur propre 1.

On retrouve alors :
$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = 1$$

Supposons maintenant A et B stochastiques suivant les colonnes, alors :

${}^t(AB) = {}^tB^tA$ est stochastique suivant les lignes donc AB est bien stochastique suivant les colonnes

Exercice : démontrer que l'image d'un vecteur de probabilités (c'est-à-dire un vecteur stochastique suivant sa colonne) par une matrice stochastique suivant les colonnes est un vecteur de probabilités.

Propriété 3

Le rayon spectral d'une matrice stochastique M est égal à 1 : $\rho(M) = 1$

Démonstration :

Soit M une matrice stochastique suivant les lignes. (Si M est stochastique suivant les colonnes, on applique ce qui suit à ${}^tM$ et on conclut en utilisant que $\rho(M) = \rho({}^tM)$.)

Soit $||| \cdot |||$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), |||MX||| \leq |||M||| |||X||| \quad (*)$$

Commentaire : on dit alors que $||| \cdot |||$ est une norme d'Algèbre (ou norme matricielle). Une telle norme existe toujours en dimension finie. Il suffit, par exemple de choisir une norme $||| \cdot |||$ subordonnée à une norme $\| \cdot \|$ sur $M_n(\mathbb{R})$:

$$|||M||| = \sup_{||X||=1} ||MX||$$

(Ce sup existe bien par continuité de la norme sur la boule unité qui est compacte en dimension finie (Théorème de Riesz))

Pour $X = 0$, la relation $(*)$ est clairement vérifiée.

Supposons $X \neq 0$ et posons $X_0 = \frac{X}{||X||}$. Donc $||X_0|| = 1$.

Comme $|||M||| = \sup_{||X||=1} ||MX||$, on a : $|||M||| \geq ||MX_0||$

Or : $||MX_0|| = \frac{||MX||}{||X||}$

D'où : $|||M||| ||X|| \geq ||MX||$

D'où $(*)$.

On peut démontrer également que :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), |||AB||| \leq |||A||| |||B|||$$

En effet : $|||AB||| = \sup_{||X||=1} ||A(BX)|| \leq |||A||| \sup_{||X||=1} ||BX|| = |||A||| |||B|||$

Cette propriété sera très utile pour les démonstrations suivantes.

Prouvons maintenant la propriété 3 :

Choisissons la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $M_n(\mathbb{R})$ qui est subordonnée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, ainsi :

$$\|M\|_\infty = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|MX\|_\infty$$

Notons

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Supposons $\|X\|_\infty = 1$, c'est-à-dire $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1$

On a donc nécessairement :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| \leq 1$$

Or, dans ce cas :

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } \|MX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Et comme M est stochastique, $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1$, d'où : $\|MX\|_\infty \leq 1$

Et donc, en passant à la borne supérieure :

$$\|M\|_\infty \leq 1$$

(Remarque : en choisissant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\|MX\|_\infty = \|X\|_\infty = 1$, donc $\|M\|_\infty = 1$)

Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$. (Existe car $\text{Sp}(M)$ n'est pas vide car, d'après la propriété 1, il contient 1)

Soit V un vecteur propre associé à λ tel que $\|V\|_\infty = 1$.

Alors :

$$\|MV\|_\infty \leq \|M\|_\infty \|V\|_\infty \leq 1$$

$$|\lambda| \|V\|_\infty \leq 1$$

$$|\lambda| \leq 1$$

D'où $\rho(M) \leq 1$ et comme $1 \in \text{Sp}(M)$:

$$\rho(M) = 1$$

Propriété 4

Soit M une matrice stochastique telle que la valeur propre 1 soit simple et dominante⁽¹⁾. Alors :

la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Démonstration :

Soit M une matrice stochastique à m lignes et m colonnes ($m \in \mathbb{N}^*$).

- Supposons que M est diagonalisable, alors le résultat est immédiat puisque :

$$\exists P \in GL_m(\mathbb{C}), \exists \Lambda \in D_m(\mathbb{C}), M = P\Lambda P^{-1}$$

($D_m(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre m à coefficients dans $\mathbb{C}$)

⁽¹⁾ On dit alors que M est ergodique. Il existe d'autres critères d'ergodicité, voir les ouvrages spécialisés.

Notons
$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ où } \{\lambda_1; \dots; \lambda_m\} = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$$

Une récurrence facile donne :
$$M^n = P \Delta^n P^{-1}$$

Et
$$\Delta^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

Or, $\rho(M) = 1$, donc les valeurs propres $\lambda_1; \dots; \lambda_m$ sont de module inférieur ou égal à 1.

De plus, ces valeurs propres sont différentes de -1 . (Sinon 1 ne serait pas valeur propre dominante)

La suite (Δ^n) converge donc vers une certaine matrice Δ_{∞} diagonale avec que des 1 et des 0 sur la diagonale (la valeur propre 1 apparaît, par hypothèse, une seule fois sur la diagonale)

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \|\Delta^n - \Delta_{\infty}\| \leq \varepsilon)$

Posons $M_{\infty} = P \Delta_{\infty} P^{-1}$. On a alors :

$$M^n - M_{\infty} = P \Delta^n P^{-1} - P \Delta_{\infty} P^{-1} = P(\Delta^n - \Delta_{\infty})P^{-1}$$

D'où, pour $n \geq N$: $\|M^n - M_{\infty}\| \leq \|P\| \times \|\Delta^n - \Delta_{\infty}\| \times \|P^{-1}\| \leq \|P\| \varepsilon \|P^{-1}\| \leq \varepsilon$

Ce qui prouve bien que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M_{∞} .

- Dans le cas où M n'est pas diagonalisable, on la trigonalise par blocs triangulaire (possible puisque le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$) :

$$\exists P \in GL_m(\mathbb{C}), \exists T \in M_m(\mathbb{C}), M = PTP^{-1}$$

et comme 1 est valeur propre simple de M , on a :

$$T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \text{ où } A \in M_{m-1}(\mathbb{C}) \text{ triangulaire supérieure}$$

Et comme 1 est valeur propre dominante de M , on a :

$$\rho(A) < 1$$

Puisque le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, on a, d'après la décomposition de Dunford :

$$A = D + N$$

où D est diagonalisable avec $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, N nilpotente, $DN = ND$.

Comme N et D commutent, on a d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = D^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

Notons p l'ordre de nilpotence de la matrice N . (On a $p \geq 2$ puisque M est supposée non diagonalisable)

Pour tout $n \geq p$, on a donc :

$$A^n = D^n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

En notant $K = \max_{1 \leq k \leq p-1} \binom{n}{k} \|N\|^k$, il vient :

$$\|A\|^n \leq \|D\|^n + K \sum_{k=1}^{p-1} \|D\|^{n-k} \leq \|D\|^n + K \|D\|^{n-p+1} \sum_{k=1}^{p-1} \|D\|^{p-1-k}$$

$$\|A\|^n \leq \|D\|^n + K \|D\|^{n-p+1} \sum_{k=1}^{p-1} \|D\|^k \leq \|D\|^n + K \|D\|^{n-p+1} \frac{1 - \|D\|^{p-1}}{1 - \|D\|}$$

Comme $\rho(D) < 1$, on a $\|D\| \neq 1$.

Comme les valeurs propres de D sont toutes de module strictement inférieur à 1, on a :

$$\|D\|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Il vient :

$$\|A\|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où :

$$T^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ce qui prouve bien que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $M_\infty = P \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}$.

Propriété 5

Soit M une matrice stochastique telle que la valeur propre 1 soit simple et dominante. Alors :

Pour tout vecteur de probabilité X_0 de $M_n(\mathbb{R})$,

la suite $(M^n X_0)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique vecteur de probabilité V invariant par M .

Démonstration :

On a vu que dans ce cas, la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice M_∞ .

Donc la suite $(M^n X_0)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur $M_\infty X_0$.

Mais la suite $(M^n X_0)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $M^{n+1} X_0 = M(M^n X_0)$

Donc, sa limite est un vecteur V tel que : $V = MV$ (Vecteur propre pour 1 ou vecteur invariant)

Or, $\text{SEP}(M, 1)$ est de dimension 1 et V est un vecteur de probabilité (car X_0 l'est) donc V est unique.