

PROBABILITÉ QUE DEUX ENTIERS SOIENT PREMIERS ENTRE EUX

Contexte :

On choisit deux entiers naturels non nuls au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient premiers entre eux ?
Pour répondre à cette question, on procède de la façon suivante : on fixe un entier n ($n \geq 2$) et on choisit deux entiers a et b au hasard compris entre 1 et n ($(n!)^2$ choix supposés équiprobables). On note alors p_n la probabilité que le PGCD de a et b soit égal à 1, puis on étudie la limite de la suite (p_n) .

Notations :

On note $\wp$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Identité d'Euler

Au XVIIIème siècle, Euler démontra une identité qui permet de faire un lien entre les nombres premiers et qui s'appellera plus tard la fonction zêta de Riemann.

On rappelle que pour tout $s \in]1, +\infty[$, la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ converge et on note $\zeta(s)$ sa somme :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Notation commode pour la suite :

Pour tout entier q supérieur à 2, notons $A(q)$ l'ensemble des entiers naturels n non nuls dont les diviseurs premiers sont inférieurs à q . Par exemple : $24 = 2^3 \times 3 \in A(3)$; $138 \in A(23)$ mais $138 \notin A(22)$

En particulier, pour tout entier naturel $n \leq q$, on a : $n \in A(q)$

1.1. Théorème Une identité d'Euler

$$\zeta(2) = \prod_{p \in \wp} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1}$$

Démonstration :

On rappelle que pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Soit $p \in \wp$. En spécialisant $x = \frac{1}{p^2}$, il vient :

$$\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2n}}$$

Fixons $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, et considérons des produits "partiels" Π_m des sommes ci-dessus :

$$\Pi_m = \prod_{\substack{p \in \wp \\ p \leq m}} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots \right) = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) \dots \left(1 + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^4} + \dots \right)$$

où q est le plus grand nombre premier inférieur à m .

Le réel Π_m existe bien car c'est un produit fini de séries convergentes. En développant ce produit on obtient la

somme de tous les nombres de la forme $\frac{1}{n^2}$ avec n entier non nul ayant des diviseurs premiers inférieurs à q :

$$\Pi_m = \prod_{\substack{p \in \wp \\ p \leq m}} \left(1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \dots \right) = \sum_{n \in A(q)} \frac{1}{n^2}$$

Or $A(q) \supset]1, m]$ car tout entier inférieur à m n'a que des diviseurs premiers inférieurs à q donc :

$$\sum_{n \in A(q)} \frac{1}{n^2} \geq \sum_{n \leq m} \frac{1}{n^2}$$

C'est-à-dire :

$$\Pi_m \geq \sum_{n \leq m} \frac{1}{n^2}$$

D'où :

$$0 \leq \zeta(2) - \Pi_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \leq m} \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq \zeta(2) - \Pi_m \leq \sum_{n > m} \frac{1}{n^2}$$

Et comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, son reste $R_m = \sum_{n > m} \frac{1}{n^2}$ tend nécessairement vers 0 lorsque m

tend vers $+\infty$. D'où la convergence de la suite (Π_m) et :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Pi_m = \zeta(2)$$

$$\prod_{p \in \wp} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1} = \zeta(2)$$

Remarque : on peut facilement généraliser le résultat précédent avec $\frac{1}{p^s}$, $s \in]1, +\infty[$ pour obtenir :

$$\prod_{p \in \wp} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = \zeta(s)$$

2. Un calcul de zêta(2)

On pourra lire par exemple :

http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/prepas_fichiers/zeta2.pdf

où l'on démontre de diverses façons que :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Un théorème de Cesàro

3.1. Théorème Cesàro

Soient n un entier supérieur à 2 et $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $a \leq b \leq n!$.

On note p_n la probabilité que a et b soient premiers entre eux.

Alors la suite (p_n) admet une limite et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{6}{\pi^2}$$

Démonstration :

Pour tout nombre premier p inférieur ou égal à n , notons A_p l'événement :

A_p : " p n'est pas un diviseur commun de a et b "

La proportion d'entiers compris entre 1 et $n!$ qui sont divisibles par p est $\frac{1}{p}$ donc la probabilité que a soit divisible par p est $\frac{1}{p}$. De même pour b . Par indépendance, la probabilité que a et b soient divisibles par p est donc $\frac{1}{p^2}$. On en déduit la probabilité de l'événement A_p :

$$p(A_p) = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Notons maintenant $A_n = \bigcap_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n!}} A_p$. A_n est donc l'événement " a et b n'ont aucun diviseur commun inférieur à $n!$ ",

autrement dit " a et b sont premiers entre eux".

Comme les événements A_p sont indépendants, il vient :

$$p_n = p(A_n) = \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n!}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Et par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on a d'après l'identité d'Euler :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

Conclusion : la probabilité que deux entiers naturels non nuls, choisis au hasard, soient premiers entre eux est

égale à $\frac{6}{\pi^2}$, soit environ 61 %.