

Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1; +\infty[\text{ tels que : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

1. Si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Preuve :

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = n^\alpha u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \text{ où } \gamma = \min(2, \beta)$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$

C'est-à-dire : $\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \left|\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)\right| \leq \frac{C}{n^\gamma})$

Or, $\gamma \in]1; +\infty[$, donc la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge absolument donc converge.

Mais, par télescopage : $\sum_{p=1}^n \ln\left(\frac{v_{p+1}}{v_p}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)$

Donc la suite $(\ln(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers e^ℓ .

Par conséquent : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}$ (où $K = e^\ell$)

D'où le résultat cherché. (En utilisant le critère de l'équivalent avec une série de Riemann)

Remarque : si $\alpha \leq 0$ alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, donc (u_n) croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc la suite (u_n) ne tend pas

vers 0 et la série diverge grossièrement.

Règle de Raabe-Duhamel (**variante**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Si $\alpha < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge. (Inégalité stricte et non plus large...)
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Une démonstration analogue à la précédente serait vouée à l'échec. En effet, on obtiendrait la condition :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui ne permettrait pas d'affirmer la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

En effet, un terme u_n peut être égal à $o\left(\frac{1}{n}\right)$ sans être le terme d'une série convergente. (Prendre $u_n = \frac{1}{n \ln n}$)

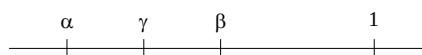
Démonstration :

Posons $\beta = \frac{\alpha+1}{2} > 0$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$

On a alors :
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Supposons $\alpha < 1$:

Posons $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



On a donc : $\alpha < \gamma < \beta < 1$

Donc : $1 - \frac{\alpha}{n} > 1 - \frac{\gamma}{n} > 1 - \frac{\beta}{n}$

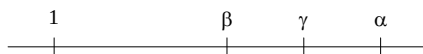
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{\gamma}{n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Or, $\sum v_n$ diverge (car $\beta < 1$). Donc, d'après le critère de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ diverge.

Supposons $\alpha > 1$:

Posons $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



On a donc : $1 < \beta < \gamma < \alpha$

Donc : $1 - \frac{\beta}{n} > 1 - \frac{\gamma}{n} > 1 - \frac{\alpha}{n}$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, on ait :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{\gamma}{n} \geq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Or, $\sum v_n$ converge (car $\beta > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison logarithmique, $\sum u_n$ converge.

Exemples :

1) On considère la série de terme général : $u_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}$

On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Mais :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{2n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.

2) On considère la série de terme général : $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$

On a :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Mais :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \left(1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.