

THÉORÈME DU RANG - FORMULE DE GRASSMANN

Théorème du rang

Soit E un e.v. de dimension finie et E' un e.v. de dimension quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$

- 1) Tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ est **isomorphe** à $\text{Im } f$.
- 2) $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$

On rappelle que, par définition :
 $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$

Démonstration :

- 1) Soit U un supplémentaire de $\text{Ker } f$:

$$E = \text{Ker } f \oplus U \text{ (et donc } \text{Ker } f \cap U = \{0\})$$

Considérons l'application linéaire $g = f|_U^{\text{Im}(f)} : U \rightarrow \text{Im } f$.

Montrons que l'application linéaire ainsi construite est un **isomorphisme** d'e.v.

Montrons que g est une surjection de U sur $\text{Im } f$:

Soit $y \in \text{Im } f$. Alors : $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

Écrivons : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker } f$ et $x_2 \in U$

Ainsi, il apparaît : $y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) = f(x_2)$

Donc y admet un antécédent, par f , **dans U** (à savoir x_2).

Donc y admet un antécédent par g . Donc g est bien une surjection de U sur $\text{Im } f$.

Montrons que g est injective :

Soient $x, y \in U$. Supposons $g(x) = g(y)$

Alors, par linéarité de g : $x - y \in \text{Ker } g$

Mais g est une restriction de f donc : $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$

Donc : $x - y \in \text{Ker } f$

Et comme $\text{Ker } f \cap U = \{0\}$, on a : $x = y$

Donc g est injective.

Bilan : g est un isomorphisme d'e.v., ce qui prouve 1).

- 2) Soit U un supplémentaire de $\text{Ker } f$: $E = \text{Ker } f \oplus U$

D'après un corollaire précédent : $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim U$

Et en vertu de ce qui précède ($\dim U = \dim \text{Im } f$), il vient :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

On a prouvé le théorème du rang.

Formule de Grassmann

F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E .

On considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \phi : F \times G &\rightarrow E \\ (f, g) &\mapsto f + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : F \cap G &\rightarrow F \times G \\ f &\mapsto (f, -f) \end{aligned}$$

1. Démontrer que $\text{Ker } \phi \cong F \cap G$.
2. En déduire une démonstration de la relation :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

1. $\text{Ker } \varphi = \{(f, g) \in E \times F \text{ tels que } f + g = 0\} = \text{Im } \psi$

De plus ψ est injective, donc induit un isomorphisme sur son image. Donc $\text{Ker } \varphi \cong F \cap G$.

2. En outre, $\text{Im } \varphi = F + G$.

Appliquons le théorème du rang à φ , il vient :

$$\dim(F \times G) = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim(F \cap G) + \dim(F + G).$$

Et comme $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on obtient la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Remarque : autre démonstration

On sait que $F \cap G$ admet au moins un supplémentaire dans F .

Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F : $F = F' \oplus (F \cap G)$

On a, par conséquent :

$$\dim F' = \dim F - \dim(F \cap G) \quad (1)$$

Montrons que :

$$F + G = F' \oplus G$$

D'une part, comme $F \cap G \subset G$: $F + G = F' + (F \cap G) + G = F' + G$

D'autre part : $F' \cap G \stackrel{F' \subset F}{=} F' \cap F \cap G \stackrel{F = F' \oplus (F \cap G)}{=} \{0\}$

On a donc bien :

$$F + G = F' \oplus G$$

On en déduit :

$$\dim F' = \dim(F + G) - \dim G \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Idée de la démonstration :

Considérer un supplémentaire F' de $F \cap G$ dans F .
Puis vérifier que F' est de dimension "convenable"