

I) Encadrement d'une somme partielle par deux intégrales.

I.1. Théorème :

① Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux et **croissante**. On a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n_0 \leq p < q : \int_p^q f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_{p+1}^{q+1} f(t) dt$$

② Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue par morceaux et **décroissante**. On a :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n_0 \leq p < q : \int_{p+1}^{q+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_p^q f(t) dt$$

Démonstration :

① Comme f est croissante sur $[n_0 ; +\infty[$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k ; k+1] : f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

En intégrant, pour t allant de k à $k+1$:

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k+1)$$

Soit encore, pour $k > n_0$:

$$\int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt$$

En sommant, pour k allant de $p+1$ à q , on obtient :

$$\int_p^q f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_{p+1}^{q+1} f(t) dt$$

Variante

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [k, k+1],$$

$$f(t-1) \leq f(k) \leq f(t)$$

En intégrant pour t allant de k à $k+1$, on récupère (via une translation d'indice dans l'intégrale minorante) l'encadrement ci-contre.

② Même principe.

Moyen mnémotechnique pour retrouver ces inégalités : la somme partielle comporte **$q - p$ termes**, donc on intègre sur des intervalles de **longueurs $q - p$** . Les inégalités sont évidentes d'après le sens de variation de f .

Exemples :

① **Équivalent de la somme partielle de la série harmonique.**

Avec $f :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$, on obtient (f étant décroissante) :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n$$

D'où :

$$\ln(n+1) + 1 - \ln 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

Or, $\ln n \leq \ln(n+1)$ et $0 \leq 1 - \ln 2$, d'où :

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat grâce à la série télescopique de terme général $u_n = \ln(n+1) - \ln n$.

En effet, on a :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc :

$$u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente.

Du théorème de sommation partielle des équivalents pour les séries divergentes, on déduit :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Et comme,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \ln(n+1)$$

On a bien :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

② Équivalent de la somme partielle de la série de Riemann dans le cas $0 \leq \alpha < 1$.

Avec $f :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, on obtient (f étant décroissante car $0 \leq \alpha$) :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} - \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

En divisant par $\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$:

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \leq \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1$$

Comme $1 - \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = 1$

Du théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}} = -1$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$(0 \leq \alpha < 1)$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat grâce à la série télescopique de terme général $u_n = n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}$.

En effet, on a :

$$u_n = n^{1-\alpha} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right) = n^{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Donc :

$$u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

Or, la série de terme général $\frac{1-\alpha}{k^\alpha}$ est divergente.

Du théorème de sommation partielle des équivalents pour les séries divergentes, on déduit :

$$\sum_{k=1}^n u_k = (1-\alpha) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

Et comme,

$$\sum_{k=1}^n u_k = n^{1-\alpha}$$

On a bien :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Exercices :

① Démontrer que :

$$\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n \ln n$$

② Démontrer que, lorsque $0 \leq \beta < 1$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} \quad (\text{Série de Bertrand divergente avec } \alpha = 1)$$

II) Encadrement de la **somme** d'une série convergente par **deux intégrales généralisées**

II.1. Critère intégral de Cauchy

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie, positive et décroissante sur $[n_0; +\infty[$.

Alors la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si f est intégrable sur $[n_0; +\infty[$.

En cas de convergence, on a :

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

Démonstration :

Supposons f intégrable sur $[n_0; +\infty[$. Comme f est positive, on a en combinant avec I.1. :

$$\forall n \in]n_0; +\infty[, \quad \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \int_{n_0}^n f(t) dt \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

Les sommes partielles étant majorées, on a donc la convergence de la série $\sum f(n)$.

De plus, toujours d'après I.1. :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n_0 \leq p < q : \quad \int_{p+1}^{q+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^q f(k) \leq \int_p^q f(t) dt$$

$$\text{En faisant tendre } q \text{ vers } +\infty : \quad \int_{p+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_p^{+\infty} f(t) dt$$

Réciproquement, supposons que la série $\sum f(n)$ converge. Alors :

$$\int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Donc f est intégrable sur $[n_0; +\infty[$.

Application : on obtient un encadrement du reste dans le cas d'une série convergente.

Exemples :

① **Nature de la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ pour $n \geq 2$**

Étudions l'intégrabilité de l'application $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2; +\infty[$.

$$\text{Posons, pour tout } x \in [2; +\infty[: \quad I(x) = \int_2^x \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\text{On a facilement :} \quad I(x) = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2)$$

$$\text{D'où :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = +\infty$$

Donc f n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$, par conséquent, la série de terme général $\frac{1}{n \ln n}$ **diverge**.

② **Équivalent du reste d'ordre n de la série de Riemann dans le cas $\alpha > 1$.**

Déjà, d'après II.1., la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$

Donc : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

$$\text{Notons, lorsque } \alpha > 1 : R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\text{D'après II.1. :} \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$\text{D'où :} \quad \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\alpha-1} = 1$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

$$(\alpha > 1, n \geq 1)$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat grâce à la série télescopique de terme général $u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}$.

En effet, on a :

$$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Donc :

$$u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

Or, la série de terme général $\frac{1-\alpha}{k^\alpha}$ est convergente.

Du théorème de sommation des équivalents (pour les restes de séries convergentes), on déduit :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = (1-\alpha) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Et comme,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = -\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On a bien :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Interprétation : prenons $\alpha = 1$ et $n = 100$

Lorsqu'on calcule la somme $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} \simeq 1,63498$ pour approximer la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} (= \frac{\pi^2}{6})$, l'erreur commise

sera voisine de $\frac{1}{100}$. (Et même inférieure d'après un encadrement vu plus haut)

Exercice :

Démontrer que, lorsque $\beta > 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\beta-1)(\ln n)^{\beta-1}} \quad (\text{Série de Bertrand convergente avec } \alpha = 1)$$