

Soit α un réel.

Le but est l'étude des séries :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

Posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Cas 1 : $\alpha > 1$

Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $\alpha > 1 > 0$), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

En sommant pour n allant de 1 à N :

$$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Or,

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^{N+1} t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{N+1} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^{N+1} = \frac{1}{(1-\alpha)(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

D'où, par passage à la limite lorsque N tend vers l'infini, l'intégrale converge puisque $\alpha > 1$ et :

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1}$$

On a donc, pour tout N :

$$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Les sommes partielles sont majorées, donc la série de Riemann converge et $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Cas 2 : $\alpha = 1$

D'après la décroissance de l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$$

En sommant, pour n allant de 1 à N :

$$0 \leq \ln(N+1) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

D'où la divergence de la série harmonique.

Cas 3 : $0 < \alpha < 1$

Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $\alpha > 0$), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

En sommant pour n allant de 1 à N :

$$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$$

Or,

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^{N+1} t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Or, comme $\alpha < 1$, l'intégrale diverge, donc, la série de Riemann diverge.

Cas 4 : $\alpha < 0$

Dans ce cas la série diverge grossièrement (puisque le terme général ne tend même pas vers 0)