

SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{Z}, +)$

On note $(\mathbb{Z}, +)$ l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs muni de l'addition usuelle.

Cet ensemble ainsi constitué est un groupe car la loi $+$ est :

- une loi de composition interne (cela signifie qu'elle s'applique à des éléments de $\mathbb{Z}$ et a pour résultat un élément de $\mathbb{Z}$: $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x + y \in \mathbb{Z}$)
- associative ($\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x + y) + z = x + (y + z)$)
- possède un élément neutre 0 ($\forall x \in \mathbb{Z}, x + 0 = 0 + x = x$)
- et tout élément admet un symétrique ($\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = y + x = 0$, à savoir $y = -x$).

Théorème

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $(n\mathbb{Z}, +)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

Les ensembles $(n\mathbb{Z}, +)$, $n \in \mathbb{N}$, sont bien des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ puisqu'ils sont non vides (ils contiennent 0) et $(a, b \in n\mathbb{Z} \Rightarrow a - b \in n\mathbb{Z})$.

Réciproquement, soit $(H, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Alors H est non vide.

Si $H = \{0\}$, alors H est bien de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n = 0$.

Supposons désormais $H \neq \{0\}$. Posons :

$$n = \min\{x \in H, x > 0\} \in H \cap \mathbb{N}^*$$

Soit $h \in H$.

On effectue la division euclidienne de h par n :

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2, h = nq + r \text{ avec } 0 \leq r < n$$

Or, $n \in H$ et H est un groupe, donc : $nq \in H$

Or, $h \in H$ et H est un groupe, donc : $h - nq \in H$

$$r \in H$$

Et comme $0 \leq r < n$, on a nécessairement : $r = 0$

D'où : $h = nq$

$$h \in n\mathbb{Z}$$

$$H \subset n\mathbb{Z}$$

Enfin, comme $n \in H$ et H est un groupe : $n\mathbb{Z} \subset H$

Finalement : $H = n\mathbb{Z}$

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont donc bien les $(n\mathbb{Z}, +)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble d'entiers $\{x \in H, x > 0\}$ est non vide (H étant un groupe, il ne peut contenir que des éléments négatifs) et minoré (par 0) donc admet bien un plus petit élément.