

Contexte :

- f est une application **continue** définie sur un **segment** $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une **subdivision** de $[a, b]$. (Cela signifie : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$)
- h est le pas de la subdivision σ . (C'est-à-dire : $h = \max_i (a_{i+1} - a_i)$)
- $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

On appelle alors *somme de Riemann* associée à $(f, \sigma, (\xi_i)_{0 \leq i \leq n})$ le réel : $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$

Théorème

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Démonstration :

Montrons que la différence suivante peut être rendue aussi petite que voulue :

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx - (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x) - f(\xi_i)) dx \right)$$

En passant aux valeurs absolues, on a la majoration suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)| dx \right)$$

Or, du théorème de Heine appliqué à f continue sur le segment $[a, b]$, on déduit :

f **uniformément continue** sur $[a, b]$ (et donc aussi sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$)

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in [a, b]^2 : (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Pour une subdivision σ de pas h tel que : $0 < h < \eta$, on aura :

$$\forall x \in [a_{i+1}, a_i], |x - \xi_i| \leq a_{i+1} - a_i \leq h < \eta$$

Ce qui entraînera :

$$|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} \varepsilon dx \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon (a_{i+1} - a_i) = \varepsilon (b - a)$$

Ceci prouve bien que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx$$

Toute intégrale est donc une limite de somme de Riemann.

Remarque : le résultat ci-dessus reste valable si f est continue par morceaux. Il suffit de refaire la même démonstration avec des subdivisions adaptées à f .

Cas particulier d'une subdivision régulière :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on particularise : $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ et $\xi_i = a_i$. (Donc $h = \frac{b-a}{n}$)

On a alors :
$$a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$$

D'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

Cas particulier des fonctions définies sur $[0, 1]$:

La formule ci-dessus devient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Remarque : en particulierisant : $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ et $\xi_i = a_{i+1}$

On a alors :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (i+1) \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

D'où aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Exemples :

1. Étudier la limite de la somme : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$.

On considère l'application f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

On a alors :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \ln 2$$

2. Étudier la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n+i)^2}$

On considère l'application f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n+i)^2} = \frac{1}{2}$$

3. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} \ln k - \sum_{k=1}^n \ln k - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \frac{k+n}{n} \right)$$

D'où
$$\ln \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$$

On considère maintenant l'application f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$

On a alors :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n} \right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1$$

D'où :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$$