

1. Cas des séries convergentes

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à **termes positifs convergente** et (u_n) une suite telle que $u_n = o(v_n)$.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $u_n = o(v_n)$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon v_n)$$

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit l'absolue convergence donc la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

Ce qui prouve :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à **termes positifs convergente** et (u_n) une suite telle que $u_n = O(v_n)$.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$.

Démonstration :

Comme $u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq M v_n)$$

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit l'absolue convergence donc la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Pour tout $n \geq N$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

Ce qui prouve :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right).$$

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à **termes positifs convergente** et (u_n) une suite telle que $u_n \sim v_n$.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

Démonstration :

Déjà : $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n - v_n = o(v_n)$

D'après ce qui précède, on a la convergence de la série de terme général $u_n - v_n$ et :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$$

Or, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et la somme de deux séries convergentes est convergente donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

2. Cas des séries divergentes

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à **termes positifs divergente** et (u_n) une suite telle que $u_n = o(v_n)$.

Alors $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $u_n = o(v_n)$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon v_n)$$

Pour tout $n > N$, on a :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^N |u_k| + \sum_{k=N+1}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^N |u_k| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^n v_k = \sum_{k=0}^N (|u_k| - \varepsilon v_k) + \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

La quantité $\sum_{k=0}^N (|u_k| - \varepsilon v_k)$ est indépendant de n .

Comme $\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ (car $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge et à termes positifs), on a :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^N (|u_k| - \varepsilon v_k) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k)$$

Pour $n \geq \max(N, N_1)$, on a alors :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2 \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

Ce qui prouve :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à **termes positifs divergente** et (u_n) une suite telle que $u_n = O(v_n)$.

Alors $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

Démonstration :

Comme $u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq M v_n)$$

Pour tout $n > N$, on a :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^N |u_k| + \sum_{k=N+1}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^N |u_k| + M \sum_{k=N+1}^n v_k = \sum_{k=0}^N (|u_k| - M v_k) + M \sum_{k=0}^n v_k$$

La quantité $\sum_{k=0}^N (|u_k| - M v_k)$ est indépendant de n .

Comme $M \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ (car $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge et à termes positifs), on a :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow \sum_{k=0}^N (|u_k| - M v_k) \leq M \sum_{k=0}^n v_k)$$

Pour $n \geq \max(N, N_1)$, on a alors :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2 M \sum_{k=0}^n v_k$$

Ce qui prouve :

$$\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

Soit $\sum_{n \geq 0} v_n$ une série à **termes positifs divergente** et (u_n) une suite telle que $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Démonstration :

Déjà :

$$u_n \sim v_n \Rightarrow u_n - v_n = o(v_n)$$

D'après ce qui précède :

$$\sum_{k=0}^n (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

$$\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n v_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$$

Applications :

De nombreuses applications classiques sont trouvables un peu partout (par exemple : équivalents pour les séries de Riemann).

Voici une autre application plus inattendue : une autre démonstration du **théorème de Césaro** :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n u_p$ admet aussi pour limite ℓ .

Démonstration :

Supposons $\ell \neq 0$. Alors, on a : $u_n \sim \ell$

En outre, comme $\ell \neq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Et d'après le théorème de sommation des équivalents pour les séries divergentes :

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim (n+1)\ell$$

$$v_n \sim \ell$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n u_p$ admet aussi pour limite ℓ .

Supposons $\ell = 0$. Posons $a_n = u_n + 1$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge et d'après le raisonnement précédent :

la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n a_p$ admet aussi pour limite 1

Et comme : $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n (u_p + 1) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n u_p + 1 = v_n + 1$

On déduit : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n u_p$ admet aussi pour limite 0.

Supposons $\ell = +\infty$. Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge vers $+\infty$.

On peut écrire : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, A = o(u_n)$

Du théorème de sommation de relation de négligeabilité pour les séries divergentes :

$$(n+1)A = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

D'où : $\forall A \in \mathbb{R}_+^*, A = o(v_n)$

Donc : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n u_p$ diverge également vers $+\infty$.

Le cas $\ell = -\infty$ est analogue.