
FORMULE DE STIRLING

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

Il est clair que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \ln(u_n)$$

Étudions, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} \times e \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) = \ln\left(e \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or, on sait que :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{D'où : } v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Donc la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ également.

Il en va donc de même de la suite (v_n) et donc de la suite (u_n) .

Et comme $u_n = e^{v_n}$, la suite (u_n) converge vers un certain réel $\ell > 0$. (Puisque (v_n) converge)

On a donc :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$$

C'est-à-dire :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \ell \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

On détermine ℓ à l'aide d'un équivalent connu dans lequel intervient des factorielles, comme par exemple l'équivalent des intégrales de Stirling :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

On connaît les deux résultats suivants (voir, par ailleurs, les résultats sur les intégrales de Wallis) :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

En conséquence :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}{2^{2n} (\ell n^n e^{-n} \sqrt{n})^2} \frac{\pi}{2}$$

D'où

$$\ell \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

Et par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$\ell = \sqrt{2\pi}$$

Conclusion :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$