

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires :

Soit I un intervalle. Soient a et b dans I avec $a < b$.

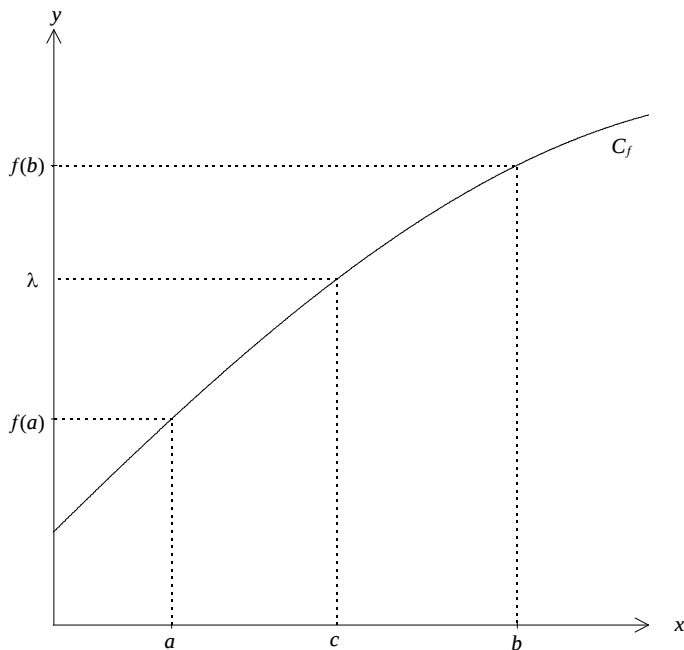
Soit f une application continue sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

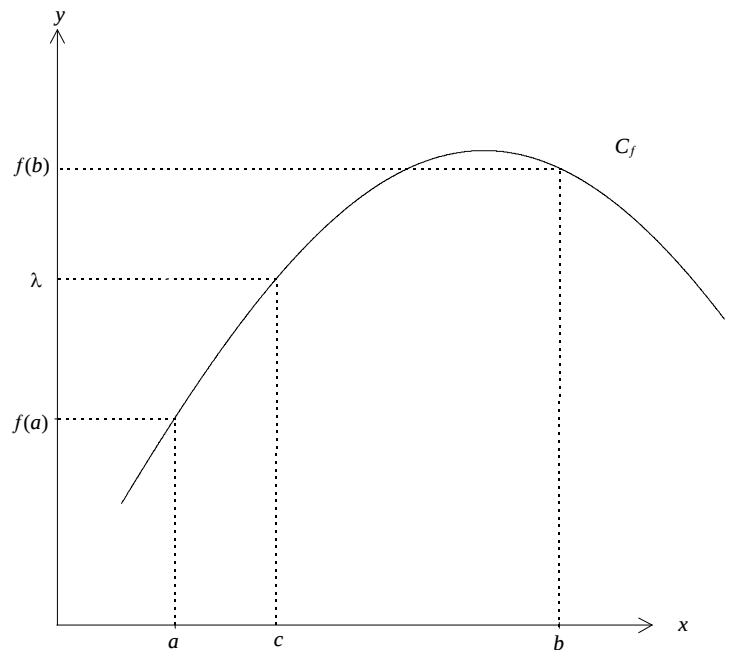
Il existe c dans $[a, b]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

Illustrations

Cas d'une fonction monotone



Cas d'une fonction non monotone



Démonstration 1 à l'aide de la borne supérieure :

Lemme 1 : propriété de la borne supérieure

Soit X une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit c sa borne supérieure.

Il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers c .

Démonstration du lemme 1 :

Comme c est la borne supérieure de X , il est le plus petit des majorants de X :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in X \text{ tel que : } c - \varepsilon < x \leq c$$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in X \text{ tel que : } c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$

On en déduit (théorème des gendarmes) que la suite (x_n) converge vers c .

Lemme 2 : suites et application continue

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Soit (x_n) une suite d'éléments de X convergeant vers un réel $\ell \in X$.

Soit f une application continue en ℓ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Démonstration du lemme 2 :

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, comme f est continue en ℓ , on a :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que : } (|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)$$

Mais la suite (x_n) converge vers ℓ . Donc pour ce réel η ci-dessus, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - \ell| < \eta$$

On a donc, par transitivité des implications :

$$n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(\ell)| < \varepsilon$$

Ceci prouve que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires :

Déjà, si $f(a) = f(b)$ alors nécessairement $\lambda = f(a) = f(b)$ et le théorème est vrai en choisissant $c = a = b$.

Dans toute la suite, on peut donc supposer : **$f(a) < f(b)$** . (Quitte à poser $g = -f$ si $f(a) > f(b)$).

Notons : $X = \{x \in [a, b] \text{ tels que } f(x) \leq \lambda\}$

Cet ensemble X est **non vide**. En effet, $f(a) \leq \lambda$, donc $a \in X$.

Cet ensemble X est **majoré** par b (puisque X est un sous ensemble de $[a, b]$).

Donc X admet une **borne supérieure** c . (Et $c \in [a, b]$)

Montrons que $f(c) \leq \lambda$:

Comme $c = \sup X$, il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers c . (Lemme 1)

Comme les x_n sont dans X , on a : $f(x_n) \leq \lambda$

Or, f est continue en c , donc par passage à la limite (Lemme 2) :

$$f(c) \leq \lambda$$

Montrons que $f(c) \geq \lambda$:

Déjà, si $c = b$ alors $f(c) = f(b) \geq \lambda$ auquel cas la démonstration s'achève.

Supposons désormais que $c < b$.

Comme $c = \sup X$, on a : $\forall x \in]c, b], x \notin X$, c'est-à-dire $f(x) > \lambda$

Soit (y_n) une suite d'éléments de $]c, b]$ qui converge vers c (Existe d'après le lemme 1). On a donc :

$$f(y_n) > \lambda$$

Or, f est continue en c , donc par passage à la limite (Lemme 2) :

$$f(c) \geq \lambda$$

Bilan : on a donc $f(c) = \lambda$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration 2 à l'aide du théorème des segments emboîtés :

Supposons $f(a) < f(b)$. (Quitte à poser $g = -f$ sinon)

Soit u le milieu de $[a, b]$.

Notons $a_1 = a$ et $b_1 = u$ si $f(u) \geq \lambda$.

Notons $a_1 = u$ et $b_1 = b$ si $f(u) < \lambda$.

Ainsi, on a toujours : $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$

En répétant ce procédé, on construit, par récurrence, une suite de segments emboîtés :

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

De plus, par construction, la longueur de $[a_n, b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$.

Les segments $[a_n, b_n]$ ont donc des longueurs qui tendent vers 0. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes.

Notons c leur limite commune. Montrons que $f(c) = \lambda$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_n) \leq \lambda \leq f(b_n)$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq \lambda \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

Or, f est continue, donc :

$$f(c) \leq \lambda \leq f(c)$$

Donc $f(c) = \lambda$.

Attention : le théorème ne s'applique pas si a et $b \in \bar{I}$. Considérer, par exemple, la fonction "partie entière" E qui est continue sur $[0, 1[$. On a $E(0) = 0$ et $E(1) = 1$. Mais il n'existe pas de réel c tel que $E(c) = \frac{1}{2}$...

Corollaire *Image d'un intervalle par une application continue*

Soit f une application continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : on utilise ici le fait que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les **convexes** de $\mathbb{R}$.

Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leq y_2$. Il s'agit de montrer tout élément λ de $[y_1, y_2]$ est élément de $f(I)$.

Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tels que $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$.

Comme I est un intervalle, on a $[a, b] \subset I$.

Comme f est continue sur $[a, b]$ (puisque $[a, b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\forall \lambda \in [y_1, y_2], \exists c \in [a, b] \text{ tel que } f(c) = \lambda.$$

D'où : $\lambda \in f(I)$.

Donc $f(I)$ est bien un intervalle.

Remarque : on peut se demander si la condition "l'image, par f , de tout intervalle est un intervalle" entraîne la condition " f continue". C'est faux. Considérer l'application f définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (\text{où } \lambda \in [-1 ; 1]).$$

f est non continue en 0, et pourtant, pour tout intervalle I contenant 0, on a $f(I) = [-1 ; 1]$.

Par contre, c'est vrai si f est monotone, voir ce document :

http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/agreg_fichiers/connexes.pdf