

Autour de $\zeta(2) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$

I. Par la méthode de Wallis

1. On pose $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.
 - a) Calculer C_0 et C_1 .
 - b) Pour $n \geq 2$, exprimer C_n en fonction de C_{n-2} .
 - c) En déduire les valeurs de C_{2n} et de C_{2n+1} .
 - d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}}$.
 - e) En déduire : $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1}$
2. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$ et $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$.
 - a) Démontrer que $u_n \leq 2$ ($\forall n \geq 1$). En déduire que (u_n) admet une limite ξ .
 - b) Pour tout $n \geq 1$, exprimer I_n en fonction de I_{n-1} .
 - c) En déduire que $\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^6}{6} - u_n \right) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_n$.
 - d) Démontrer que $I_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1}$ et en déduire que $\xi = \frac{\pi^2}{6}$.

II. Par le lemme de Riemann-Lebesgue

Le lemme : Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit λ un réel.

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

1. Démontrer le lemme pour f de classe C^1 . (On pourra intégrer par parties)
2. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^{\pi} (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$
3. Démontrer que $\sum_{p=1}^n \cos(pt) = \operatorname{Re} \frac{e^{(n+1)it} - e^{it}}{e^{it} - 1}$ pour tout $t \neq 2k\pi$. En déduire que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} (e^{i(n+1)t} - e^{it}) dt$$
4. Démontrer que la fonction f définie sur $]0, \pi]$ par $f(t) = \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.
5. À l'aide du lemme, déduire des questions précédentes que : $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

III. Par la méthode de Holme et Papadimitriou

1. Démontrer que pour tous $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1}\theta \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} (\cotan^2 \theta)^{n-j}$$

[On pourra utiliser la formule de Moivre]

2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n défini par :

$$P_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} X^{n-j}$$

Démontrer que les n racines de P_n sont les réels : $\alpha_k = \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$.

3. Montrer que : $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

4. Démontrer que, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\sin \theta < \theta < \tan \theta$. En déduire : $\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$.

5. Démontrer que : $\frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$.

6. En déduire : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque : la méthode ci-dessus peut se généraliser afin de calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$

IV. À l'aide des séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, impaire telle que : $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0$

1. Calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n et b_n définis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

2. Démontrer que la série $S_p(f)$ de Fourier de f définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$S_p(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^p (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

On peut aussi retrouver ce résultat à l'aide du DSE de l'Arctan.

4. À l'aide de la formule de Parseval, démontrer que la série $\sum_{p \geq 0} \left(\frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2$ converge. En déduire :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. En déduire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

I. Par la méthode de Wallis

1. On pose $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

a) $C_0 = \frac{\pi}{2}$ et $C_1 = 1$.

b) $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^{n-1}(t) dt$

En intégrant par parties ($u'(t) = \cos(t)$; $v(t) = \cos^{n-1}(t)$), il vient :

$$C_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{n-2}(t) dt = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-2}(t) dt = (n-1)(C_{n-2} - C_n)$$

D'où $C_n = \frac{n-1}{n} C_{n-2}$.

c) On en déduit (récurrence) que : $C_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} C_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$ et $C_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} C_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

d) On a déjà : $1 \leq \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}}$. En outre, $\frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} \leq \frac{C_{2n-1}}{C_{2n+1}} = \frac{(2n-2)!!(2n+1)!!}{(2n-1)!!(2n)!!} = \frac{2n+1}{2n}$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} = 1$.

e) $\frac{C_{2n}}{C_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!(2n+1)!!}{(2n)!!(2n)!!} \frac{\pi}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2$, d'où $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1}$.

2. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$ et $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$.

a) Pour $p \geq 2$, on a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p(p-1)} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ donc $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p^2} \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1$, d'où $u_n \leq 2$ ($\forall n \geq 1$).

En outre, (u_n) est croissante donc admet une limite $\xi \leq 2$.

b) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t) \cos^{2n-1}(t) dt = -\frac{1}{n} C_n + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t) dt$

D'où $I_n = -\frac{1}{n} C_n + (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ et par suite, $I_n = -\frac{1}{n^2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{4} + \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

c) On en déduit (récurrence) que $\frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^6}{6} - u_n \right) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_n$.

d) Comme, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$, il vient : $I_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^{2n}(t) dt \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1}$.

D'où $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2n+1} \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$ d'où $\xi = \frac{\pi^2}{6}$.

II. Par le lemme de Riemann-Lebesgue

1. Les applications f et $t \mapsto e^{it}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$, on a, par une intégration par parties :

$$\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = \left[f(t) \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} f'(t) dt = \frac{1}{i\lambda} \left[f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b e^{i\lambda t} f'(t) dt \right]$$

D'où :

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Notons $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$ (existe car, par hypothèse, f' est continue sur le compact $[a, b]$)

Ainsi :

$$0 \leq \left| \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} [|f(b)| + |f(a)| + (b-a)M]$$

D'où :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0.$$

2. Les fonctions considérées étant de classe C^1 sur $[0, \pi]$, on a, à l'aide d'intégrations par parties :

$$I_n = \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \left[(at^2 + bt) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi (2at + b) \sin(nt) dt$$

$$I_n = \frac{1}{n} \left\{ \left[(2at + b) \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2a}{n} \int_0^\pi \cos(nt) dt \right\} = \frac{(2a\pi + b)(-1)^n - b}{n^2}$$

La condition $I_n = \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit encore : $(2a\pi + b)(-1)^n - b = 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Si n est pair, on obtient : $a = \frac{1}{2\pi}$. Si n est impair, on obtient : $b = -1$.

Bilan : on donc : $\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

3. Comme $t \neq 2k\pi$ on a : $\sum_{p=1}^n e^{ipt} = \frac{e^{it}(1-e^{int})}{1-e^{it}} = \frac{e^{(n+1)it} - e^{it}}{e^{it} - 1}$ (somme de termes d'une suite géométrique)

En passant à la partie réelle, on obtient : $\sum_{p=1}^n \cos(pt) = \operatorname{Re} \frac{e^{(n+1)it} - e^{it}}{e^{it} - 1}$

En utilisant la question 2, on a : $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) \cos(pt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) \sum_{p=1}^n \cos(pt) dt$

Et d'après ce qui précède : $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} (e^{i(n+1)t} - e^{it}) dt$.

4. La fonction $t \mapsto e^{it}$ est dérivable en 0. On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it} - 1}{t} = i$$

On en déduit :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} = 2\pi i$$

La fonction f admet un prolongement continu en 0.

Pour tout $t \in]0, \pi[$, on a :

$$f'(t) = \frac{(2t-2\pi)(e^{it} - 1) - (t^2 - 2\pi t)i e^{it}}{(e^{it} - 1)^2}$$

Au voisinage de 0, on a :

$$f'(t) = \frac{(2t-2\pi)(it - \frac{t^2}{2} + o(t^2)) - (t^2 - 2\pi t)i(1 + it + o(t))}{(it + o(t))^2}$$

En développant puis simplifiant :

$$f'(t) = \frac{it^2 - \pi t^2 + o(t^2)}{-t^2 + o(t^2)}$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \pi - i$$

La fonction f se prolonge bien en une fonction de classe C^1 en 0.

5. D'après le lemme de Lebesgue, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} e^{i(n+1)t} dt = 0$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{t(t-2\pi)}{e^{it} - 1} e^{it} dt$$

Or, $\operatorname{Re} \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2}$ d'où :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi t(t-2\pi) dt = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \pi^3 \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

III. Par la méthode de Holme et Papadimitriou

1. D'après la formule de Moivre et la formule du binôme, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\cos(2n+1)\theta + i \sin(2n+1)\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k i^k \sin^k \theta \cos^{2n+1-k} \theta$$

Les imaginaires sont obtenus en ne gardant, dans la somme, que les entiers k impairs, c'est-à-dire de la forme $k = 2j + 1$ avec $0 \leq j \leq n$:

$$i \sin(2n+1)\theta = \sum_{j=0}^n C_{2n+1}^{2j+1} i^{2j+1} \sin^{2j+1} \theta \cos^{2n-2j} \theta$$

Or, $i^{2j+1} = i \times i^{2j} = i \times (-1)^j$.

En outre :

$$\sin^{2j+1} \theta \cos^{2n-2j} \theta = \sin^{2n+1} \theta \sin^{2j-2n} \theta \cos^{2n-2j} \theta = \sin^{2n+1} \theta (\cotan^2 \theta)^{n-j}.$$

D'où, en passant à la partie imaginaire :

$$\sin(2n+1)\theta = \sin^{2n+1} \theta \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} (\cotan^2 \theta)^{n-j}$$

2. Le polynôme P_n est de degré n donc possède au plus n racines.

Les réels $\frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$, sont éléments de $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\sin \frac{k\pi}{2n+1} \neq 0$ et les nombres α_k sont bien définis.

D'autre part, la fonction cotan est continue, décroissante et positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Il en va donc de même de la

fonction cotan qui induit une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $]0, +\infty[$.

Donc les réels α_k sont distincts.

D'après la question 1, pour tout $k \in [1, n]$, on a :

$$P_n(\alpha_k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} \left(\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)^{n-j} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1} \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} = 0$$

Les n racines de P_n sont bien les réel : $\alpha_k = \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$.

3. D'après les formules de Newton, on a :

$$\sum_{k=1}^n x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

En appliquant ce résultat au polynôme $P_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^{2j+1} X^{n-j}$, on a :

$$\text{Donc : } \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{C_{2n+1}^3}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

4. Il suffit d'étudier les variations des fonctions $\varphi : \theta \mapsto \theta - \sin \theta$ et $\psi : \theta \mapsto \tan \theta - \theta$. On constate que ces deux fonctions sont strictement croissantes sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ ($\varphi'(\theta) = 1 - \cos \theta$ et $\psi'(\theta) = \tan^2 \theta$). Et comme $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, on en déduit que ces fonctions sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

D'où l'encadrement : $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

En inversant cet encadrement (la fonction "inverse" étant strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$), on obtient :

$$\frac{1}{\tan \theta} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\sin \theta}$$

Puis, en élevant au carré ($t \mapsto t^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$) :

$$\cotan^2 \theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cotan^2 \theta$$

5. Avec $\theta = \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'encadrement ci-dessus devient :

$$\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} < 1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

Et en sommant pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

Et d'après la question 3 :

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n(n+2)}{3}$$

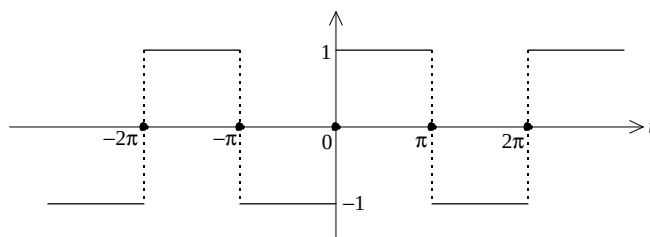
$$\text{D'où : } \frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3} \frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}.$$

6. En appliquant le théorème des "gendarmes", on obtient immédiatement : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque : la méthode ci-dessus peut se généraliser afin de calculer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$

IV. À l'aide des séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, impaire telle que : $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0$



1. Les coefficients de Fourier (trigonométriques) a_n et b_n sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0 \text{ car } f \text{ est impaire}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = -\frac{2}{n\pi} [\cos(nt)]_0^{\pi} = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$

On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi}$

2. La fonction f est C^1 par morceaux et égale à sa régularisée. D'après le théorème de Dirichlet, la série $S_p(f)$ de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Et on a alors :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t)$$

3. En particulier pour $t = \frac{\pi}{2}$:
- $$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

On peut aussi retrouver ce résultat à l'aide du DSE de l'Arctan.

Or, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, d'où :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

4. Puisque f est continue par morceaux et égale à sa régularisée, d'après la formule de Parseval, la série de terme

général $(a_n^2 + b_n^2)$ converge et : $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$. D'où :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p+1}^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2p+1)} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = 1$$

On a donc bien :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. Les séries de terme général $\frac{1}{(2p)^2}$ et $\frac{1}{(2p+1)^2}$ sont convergentes, donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

D'où :

$$\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque : la méthode ci-dessus permet de calculer facilement : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.