

Fonctions réelles

Technique obsolète

Exercice 1 [03223] [Correction]

Montrer que lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$$

Difféomorphisme

Exercice 2 [02818] [Correction]

Soit $f:]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

- Trouver le plus grand intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel f est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme.
- On note g l'application réciproque de $f|_I$. Montrer que les coefficients du développement limité de g en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

Etude de branche asymptotique

Exercice 3 [01409] [Correction]

Soit $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Montrer que f admet un point d'inflexion.
Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f et en donner l'allure.

Exercice 4 [01408] [Correction]

Étudier la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + x}{|x| + 1}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 5 [01407] [Correction]

Étudier la fonction

$$f: x \mapsto \frac{2 \ln x + 3}{x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 6 [01406] [Correction]

Étudier la fonction

$$f: x \mapsto x^2 e^{-x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 7 [01467] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto (x+1)e^{1/x}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.

En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f .

Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 8 [01468] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.

En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f .

Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 9 [01469] [Correction]

Étudier les asymptotes de

$$x \mapsto \sqrt{[3](x^2 - 2)(x + 3)}$$

Exercice 10 [01825] [\[Correction\]](#)

Étudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln x}$$

Exercice 11 [01826] [\[Correction\]](#)

Étudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x-1| + x}$$

Fonctions hyperboliques inverses**Exercice 12** [01867] [\[Correction\]](#)

Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$ | c) $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$ | e) $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$ |
| b) $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$ | d) $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$ | f) $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x)$ |

Exercice 13 [01868] [\[Correction\]](#)

Simplifier :

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $\operatorname{argch}(2x^2 - 1)$ | b) $\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$ |
|-------------------------------------|---|

Exercice 14 [01870] [\[Correction\]](#)

Résoudre l'équation

$$\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1$$

Exercice 15 [01871] [\[Correction\]](#)Soit $G:]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \operatorname{argsh}(\tan t)$.Montrer que G est dérivable et que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $G'(t) = \operatorname{ch} G(t)$.**Exercice 16** [02454] [\[Correction\]](#)Convergence et calcul de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.**Exercice 17** [02846] [\[Correction\]](#)Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?**Exercice 18** [01567] [\[Correction\]](#)

Résoudre

$$(1+x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

en posant $x = \operatorname{sh}(t)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

On découpe l'intégrale en deux

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt$$

et on procède à une intégration par parties

$$\int_1^x e^{t^2} dt = \int_1^x \frac{2t}{2t} e^{t^2} dt = \left[\frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$

Ainsi

$$\int_0^x e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + C^{te}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, sachant que la constante est négligeable devant $e^{x^2}/2x \rightarrow +\infty$, il suffit pour conclure de montrer

$$\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt = o\left(\int_1^x e^{t^2} dt\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geq 1$ tel que

$$\forall t \geq A, \frac{1}{t^2} \leq \varepsilon$$

et alors

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + \varepsilon \int_A^x e^{t^2} dt$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + \varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

Or

$$\int_1^x e^{t^2} dt \geq \int_1^x 1 dt \geq x - 1 \rightarrow +\infty$$

donc pour x assez grand

$$\int_1^A \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq \varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq 2\varepsilon \int_1^x e^{t^2} dt$$

et on peut conclure.

Exercice 2 : [énoncé]

a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq e - 1$.

Le plus grand intervalle cherché est $I =]-1; e - 1[$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas, f réalise donc un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de I vers $] -\infty; 1/e[$.

b) On a

$$\ln(1 + g(x)) = x(1 + g(x))$$

En dérivant

$$g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x)$$

En dérivant à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k+1)}(0)g^{(n-k)}(0)$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geq 0$$

Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

Exercice 3 : [énoncé]

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ses dérivées premières et secondes sont

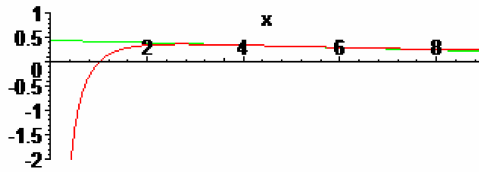
$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, f''(x) = -\frac{1}{x^3} - 2\frac{1 - \ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

On en déduit les variations suivantes

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1/e$	$\searrow 0$

x	$e^{3/2}$
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad +$

La fonction f présente un point d'inflexion en $e^{3/2}$.

FIGURE 1 – La fonction $x \mapsto (\ln x)/x$

Puisque $\lim_0 f = -\infty$, il y a une asymptote d'équation $x = 0$.

Puisque $\lim_{+\infty} f = 0$, il y a une asymptote d'équation $y = 0$.

`f:=x->ln(x)/x:`

`a:=exp(3/2):`

`plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a)], x=0..2*a, y=-2..1);`

Exercice 4 : [\[énoncé\]](#)

f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (par opérations) sur $\mathbb{R}^*$.

Par limite de taux de variation on constate que f est aussi dérivable en 0 avec

$f'(0) = 1$.

Sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = x$ ce qui achève l'étude sur $\mathbb{R}_+$.

Sur $\mathbb{R}_-$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x}$$

présente un minimum en $1 - \sqrt{2}$ de valeur $2\sqrt{2} - 3$ et f présente une asymptote d'équation $y = -x - 2$, courbe au dessus.

`plot([(x^2+x)/(abs(x)+1), -x-2], x=-5..2, y=-1..3);`

Exercice 5 : [\[énoncé\]](#)

f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{4 \ln x}{x^3}$$

x	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2\sqrt{e}$	$\searrow 0$

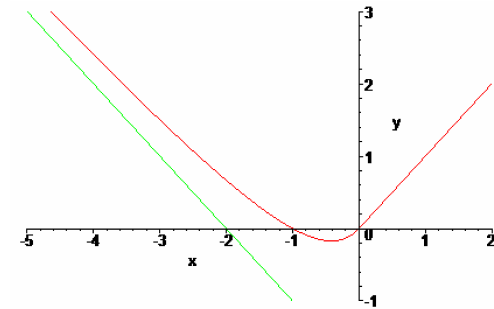
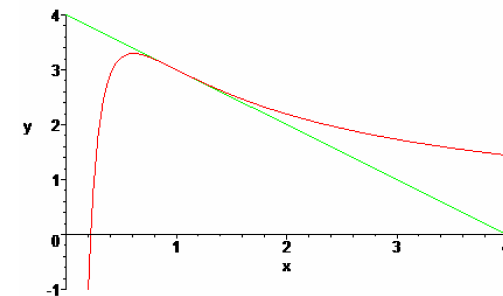
En 0 : (Oy) est asymptote.

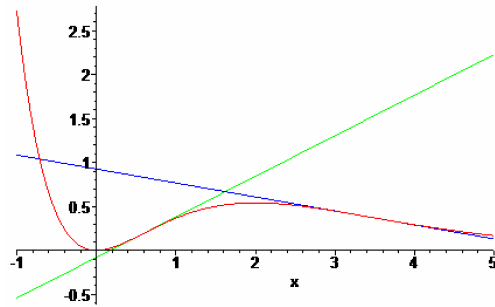
En $+\infty$: (Ox) est asymptote.

En 1 : f'' s'annule avec changement de signe, point d'inflexion.

L'équation de la tangente en ce point est $y = -(x - 1) + 3$.

`plot([(2*ln(x)+3)/x, -(x-1)+3], x=0..4, y=-1..4);`

FIGURE 2 – La fonction $x \mapsto \frac{x^2 + x}{|x| + 1}$ FIGURE 3 – La fonction $x \mapsto \frac{2 \ln x + 3}{x}$

FIGURE 4 – La fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ **Exercice 6 :** [énoncé]

f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x(2-x)e^{-x} \text{ et } f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

f présente un minimum absolu en 0 de valeur 0 et un maximum local en 2 de valeur $4/e^2$.

f présente des points d'inflexion en $2 + \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}$.

f présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

f présente une branche parabolique verticale en $-\infty$.

f:=x->x^2*exp(-x):

a:=2+sqrt(2):b:=2-sqrt(2):

plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a), D(f)(b)*(x-b)+f(b)], x=-1..5,

color=[red, blue, green]);

Exercice 7 : [énoncé]

On a

$$f(x) = (x+1)e^{1/x} = x+2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Par suite, la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

Exercice 8 : [énoncé]

On a

$$f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x)) = \ln 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation $y = \ln 2x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et la courbe est en dessous de celle-ci.

Exercice 9 : [énoncé]

On a

$$\sqrt{3}(x^2-2)(x+3) = x\sqrt{3}\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) = x+1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Courbe en dessous (resp. au dessus) de l'asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 10 : [énoncé]

f est définie et continue sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{x \ln x}{x \ln x} = 1, f(x) - x = \frac{\ln(x+1) + x \ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$

et

$$f(x) - (x+1) = \frac{(x+1) \ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0^+$$

La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe $y = f(x)$ est au dessus.

Quand $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote.

Quand $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote.

Quand $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$, on prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$.

Exercice 11 : [énoncé]

f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x - 1}$$

On a

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow \frac{1}{2}, f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{5x}{4x-2} \rightarrow \frac{5}{4} \text{ et } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{8x-4} \rightarrow 0^+$$

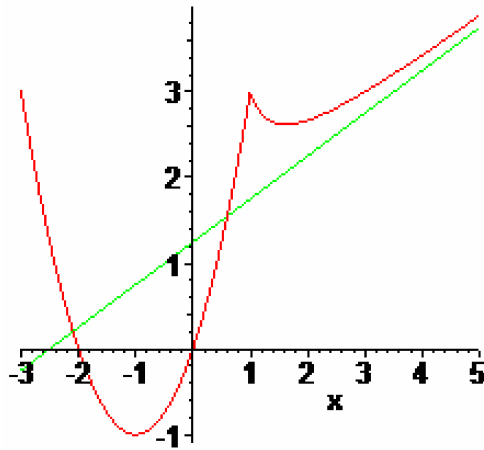
La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ est asymptote en $+\infty$ courbe au dessus.

Quand $x \rightarrow -\infty$,

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Il y a une branche parabolique verticale.

plot([f(x), x/2+5/4], x=-3..5);

FIGURE 5 – La fonction $x \mapsto \frac{x^2+2x}{|x-1|+x}$ **Exercice 12 :** [\[énoncé\]](#)

- $\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a}$ donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + x^2}$.
- $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x) = 2\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = 2x\sqrt{1+x^2}$.
- $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
- $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
- $\operatorname{th}^2 a = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}$ donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 13 : [\[énoncé\]](#)

- Pour $x \geq 1$, posons $\alpha = \operatorname{argch} x$
On a

$$\operatorname{argch}(2x^2 - 1) = \operatorname{argch}(2\operatorname{ch}^2 \alpha - 1) = \operatorname{argch}(\operatorname{ch} 2\alpha) = 2\alpha = 2\operatorname{argch} x$$

Par parité, pour $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$,

$$\operatorname{argch}(2x^2 - 1) = 2\operatorname{argch} |x|$$

- Posons $\alpha = \operatorname{argsh} x$.

On a $2x\sqrt{1+x^2} = 2\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sh} 2\alpha$ donc

$$\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2\alpha = 2\operatorname{argsh} x$$

Exercice 14 : [\[énoncé\]](#)

La fonction $f: x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$ est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

$f(1) = \operatorname{argsh}(1)$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Puisque $\operatorname{sh} 1 \geq 1$, $\operatorname{argsh}(1) \leq 1$.

L'équation possède donc une unique solution a . Déterminons-la.

$$\operatorname{sh}(1) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) = a^2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{a^2-1} = a^2 + \sqrt{a^4-1}$$

donc

$$\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh}(1) - a^2$$

puis

$$a^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh} 1}$$

et enfin

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}}$$

Exercice 15 : [\[énoncé\]](#)

G est dérivable par composition et $G'(t) = \sqrt{1 + \tan^2 t}$. Or

$$\operatorname{ch} G(t) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 G(t)} = \sqrt{1 + \tan^2 t}.$$

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

À l'aide d'une intégration par partie :

$$a_{n+1} = 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt = 2(n+1)(a_n - a_{n+1})$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n.$$

$$a_n \neq 0 \text{ et } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1 \text{ donc } R = 1.$$

Pour $x \in]-1; 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 ((1-t^2)x)^n dt.$$

On peut permuter somme infinie et intégrale (par un argument de convergence uniforme par exemple) et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{dt}{1-x+xt^2}.$$

Pour $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Pour $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\frac{1-x}{x} + t^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} \right).$$

Pour $x < 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \operatorname{argth} \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} \right).$$

Exercice 17 : [énoncé]

On a $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} a_n$. Par application de la règle de d'Alembert, on obtient $R = 2$. La relation $(2n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$ avec $a_0 = 1$ permet d'affirmer que la somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est solution sur $] -2; 2[$ de l'équation différentielle

$$x(x-2)S'(x) + (x-1)S(x) + 1 = 0$$

La recherche de solution définie et continue en 0 donne

$$S(x) = \frac{\arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x(2-x)}} \text{ pour } x > 0$$

et

$$S(x) = \frac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} \text{ pour } x < 0$$

Exercice 18 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.

Posons z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(\operatorname{sh}(t))$. z est deux fois dérivable.

Après calculs : y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - 4z = 0$.

On obtient

$$z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

puis

$$y(x) = C_1 e^{2 \operatorname{argsh} x} + C_2 e^{-2 \operatorname{argsh} x} = C_1 (x + \sqrt{1+x^2})^2 + \frac{C_2}{(x + \sqrt{1+x^2})^2}$$