

# Séries numériques

## Nature de séries numériques

### Exercice 1 [ 01020 ] [Correction]

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u_n = \frac{n}{n^2+1} & \text{c) } u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\ \text{b) } u_n = \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} & \text{d) } u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{array}$$

### Exercice 2 [ 02353 ] [Correction]

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} & \text{b) } u_n = \frac{1}{n \cos^2 n} & \text{c) } u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \end{array}$$

### Exercice 3 [ 03195 ] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

### Exercice 4 [ 01021 ] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Exercice 5 [ 02789 ] [Correction]

Nature de la série de terme général

$$\frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$$

### Exercice 6 [ 02432 ] [Correction]

- a) Étudier  $\sum u_n$  où  $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}$ .  
 b) Étudier  $\sum v_n$  où  $v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+\dots+x^n}$ .

### Exercice 7 [ 03881 ] [Correction]

Pour  $a > 0$ , étudier la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

### Exercice 8 [ 02376 ] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série  $\sum u_n$  converge ?  
 b) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge ?

### Exercice 9 [ 01029 ] [Correction]

[Règle de Raabe-Duhamel] Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels strictement positifs.

- a) On suppose qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que  $u_n =_{n \rightarrow +\infty} O(v_n)$ .

- b) On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série  $\sum u_n$  converge.

- c) On suppose cette fois-ci que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1$$

Montrer que la série  $\sum u_n$  diverge

**Exercice 10** [ 02800 ] [\[Correction\]](#)

a) Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0, \sum |v_n| \text{ converge et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

Montrer que  $(n^\lambda u_n)$  converge.

b) Nature de la série de terme général

$$\frac{n^n}{n!e^n} ?$$

**Exercice 11** [ 02516 ] [\[Correction\]](#)

Soient

$$u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) \text{ et } v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$$

a) Montrer que pour  $n$  assez grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

b) En déduire que  $\sum u_n$  diverge. (on pourra utiliser  $\frac{u_n}{v_n}$ )

**Exercice 12** [ 01040 ] [\[Correction\]](#)

Donner la nature de la série des  $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$ .

**Nature de séries de signe non constant****Exercice 13** [ 01034 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de  $\sum u_n$  pour :

a)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

b)  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

c)  $u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$

d)  $u_n = \cos \left( \pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$

**Exercice 14** [ 01035 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{[n]n!}}$$

**Exercice 15** [ 01039 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{n} \right)$$

**Exercice 16** [ 03772 ] [\[Correction\]](#)

Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos \left( n^2 \pi \ln(1 - 1/n) \right)$$

**Exercice 17** [ 01045 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}$$

**Exercice 18** [ 02351 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de  $\sum u_n$  pour :

a)  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}}$

b)  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$

c)  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$

**Exercice 19** [ 02793 ] [\[Correction\]](#)

Convergence de la série de terme général  $u_n = \sin \left( \pi \sqrt{n^2 + 1} \right)$ .

**Exercice 20** [ 02794 ] [\[Correction\]](#)

Nature de la série de terme général

$$u_n = \sin \left( \pi(2 + \sqrt{3})^n \right)$$

**Exercice 21** [ 01335 ] [\[Correction\]](#)

Étudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$$

**Exercice 22** [ 03236 ] [\[Correction\]](#)

Montrer la divergence de la série

$$\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$$

**Exercice 23** [ 01337 ] [\[Correction\]](#)

Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}?$$

**Exercice 24** [ 03208 ] [\[Correction\]](#) $\alpha$  désigne un réel strictement positif.

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x} dx$$

## Convergence de séries à termes positifs

**Exercice 25** [ 03355 ] [\[Correction\]](#)Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite déterminée par

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

Montrer :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

**Exercice 26** [ 01022 ] [\[Correction\]](#)Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

**Exercice 27** [ 01023 ] [\[Correction\]](#)Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs convergente.Montrer que  $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$  est aussi convergente**Exercice 28** [ 03411 ] [\[Correction\]](#)Soit  $a$  une suite de réels positifs. Comparer les assertions

- (i) la série de terme général  $a_n$  converge ;
- (ii) la série de terme général  $\sqrt{a_n a_{n+1}}$  converge.

**Exercice 29** [ 01024 ] [\[Correction\]](#)Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. On suppose que

$$\sqrt{[n]u_n} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}_+$$

- a) Montrer que si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  est divergente.
- b) Montrer que si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  est convergente.
- c) Observer que, lorsque  $\ell = 1$ , on ne peut rien conclure.

**Exercice 30** [ 01026 ] [\[Correction\]](#)Soient  $(u_n)$  une suite de réels positifs et

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.**Exercice 31** [ 01027 ] [\[Correction\]](#)Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs.

- a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

Montrer que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

- b) Même question avec

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \dots + u_n}$$

On pourra étudier  $\ln(1 - v_n)$  dans le cadre de la divergence.

**Exercice 32** [ 03119 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  dans  $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$$

Montrer que si la série de terme général  $v_n$  converge alors la série de terme général  $u_n$  diverge.

**Exercice 33** [ 03235 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs. On considère la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$$

Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont même nature et qu'en cas de convergence

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

**Exercice 34** [ 03674 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $\sum a_n$  une série à termes strictement positifs convergente.

Établir la convergence de la série  $\sum a_n^{1-1/n}$ .

**Exercice 35** [ 02447 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $\sum a_n$  une série à termes positifs convergente.

Peut-on préciser la nature de la série de terme général

$$u_n = a_0 a_1 \dots a_n ?$$

**Exercice 36** [ 03750 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive et convergeant vers 0. On pose

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{S_n} \text{ avec } S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont même nature.

**Exercice 37** [ 02956 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels strictement positifs.

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$v_n = u_n / S_n \text{ où } S_n = u_1 + \dots + u_n$$

Déterminer la nature de  $\sum v_n$ .

**Exercice 38** [ 02958 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général  $u_n$  converge.

On note le reste d'ordre  $n$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Étudier la nature des séries de termes généraux  $u_n / R_n$  et  $u_n / R_{n-1}$ .

**Exercice 39** [ 02959 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive et strictement croissante.

Nature de la série de terme général

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

**Exercice 40** [ 03716 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $(a_n)$  une suite de réels strictement positifs et  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

a) On suppose que la série  $\sum a_n$  converge, donner la nature de  $\sum a_n / S_n$ .

b) On suppose que la série  $\sum a_n$  diverge, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

En déduire la nature de  $\sum a_n / S_n^2$ .

c) On suppose toujours la divergence de la série  $\sum a_n$ .

Quelle est la nature de  $\sum a_n / S_n$  ?

**Exercice 41** [ 03225 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $f: [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement positive telle que

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \bar{\mathbb{R}}$$

a) On suppose  $\ell > -1$  ou  $\ell = -1^+$ . Montrer la divergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

b) On suppose  $\ell < -1$ . Montrer la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

## Critère spécial

**Exercice 42** [ 01038 ] [\[Correction\]](#)

a) Justifier l'existence, pour  $n \in \mathbb{N}$  de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

b) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Déterminer un équivalent de  $R_n$ .

d) Donner la nature de la série de terme général  $R_n$ .

**Exercice 43** [ 01036 ] [\[Correction\]](#)

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

**Exercice 44** [ 01037 ] [\[Correction\]](#)

On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} dt$$

déterminer le signe de  $I$ .

**Exercice 45** [ 04131 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } u_n = \ln(e^{s_n} - 1)$$

a) Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.

b) Prouver que les suites  $(s_n)_{n \geq 1}$  et  $(u_n)_{n \geq 1}$  convergent.

c) Étudier la nature de  $\sum u_n$ .

## Etude de séries à termes positifs

**Exercice 46** [ 01025 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante réelle. On suppose que la série  $\sum u_n$  converge.

a) On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Déterminer la limite de  $S_{2n} - S_n$ .

b) En déduire  $2nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

c) Conclure que  $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 47** [ 03233 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $(u_n)$  une suite décroissante de réels positifs et  $\alpha$  un réel positif.

On suppose la convergence de la série

$$\sum n^\alpha u_n$$

Montrer

$$n^{\alpha+1} u_n \rightarrow 0$$

**Exercice 48** [ 02957 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)$  une suite réelle strictement positive, décroissante, de limite nulle.

On suppose que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^n u_k - nu_n$$

est bornée.

Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge.

## Séries dont le terme général est défini par récurrence

### Exercice 49 [01097] [Correction]

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in [0; \pi]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 1 - \cos u_n$$

Montrer que  $u_n \rightarrow 0$  et déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 50 [01098] [Correction]

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Montrer que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ .

Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n - \ell$  ?

### Exercice 51 [03371] [Correction]

a) Déterminer la limite de la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

b) Déterminer la limite de la suite définie par

$$v_n = nu_n$$

c) Donner la nature de la série  $\sum u_n$  et celle de la série  $\sum (-1)^n u_n$

### Exercice 52 [03012] [Correction]

La suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  est définie par  $a_0 \in ]0; \pi/2[$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n)$$

Quelle est la nature de la série de terme général  $a_n$  ?

### Exercice 53 [01099] [Correction]

Soient  $u_0 \in ]0; \pi/2[$  et  $u_{n+1} = \sin u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $u_n \rightarrow 0^+$ .

b) Exploiter  $u_{n+1} - u_n$  pour montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n^3$  converge.

c) Exploiter  $\ln u_{n+1} - \ln u_n$  pour montrer que  $\sum_{n \geq 0} u_n^2$  diverge.

### Exercice 54 [02961] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_0 > 0$  et pour tout  $n > 0$ ,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1})$$

Étudier la suite  $(u_n)$  puis la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 55 [02440] [Correction]

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite définie par  $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$$

a) Étudier la convergence de la suite  $(a_n)$ .

b) Déterminer la nature de la série de terme général  $(-1)^n a_n$ .

c) Déterminer la nature de la série de terme général  $a_n^2$ .

d) Déterminer la nature de la série de terme général  $a_n$  à l'aide de la série

$$\sum \ln \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

### Exercice 56 [01101] [Correction]

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in ]0; 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

a) Existence et éventuellement calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - u_n)$$

b) Nature de la série de terme général  $u_n$  ?

**Exercice 57** [ 02951 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $u_0 \in [0; 1]$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

a) Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?

b) Même question lorsque  $u_n$  est définie par la récurrence  $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$  (avec  $\alpha > 0$ ).

**Exercice 58** [ 01100 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $(a_n)$  une suite positive et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente si, et seulement si, la série de terme général  $a_n$  est convergente.

**Exercice 59** [ 02960 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_0 \in ]0; 1]$  et que, pour un certain  $\beta > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1}^\beta = \sin u_n^\beta$$

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$ .

**Exercice 60** [ 02433 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $\alpha > 0$  et  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$$

a) Condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $(u_n)$  converge.

b) Equivalent de  $u_n$  dans le cas où  $(u_n)$  diverge.

c) Equivalent de  $(u_n - \ell)$  dans le cas où  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

## Comparaison séries intégrales

**Exercice 61** [ 00077 ] [\[Correction\]](#)

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, donner la nature de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$$

**Exercice 62** [ 01064 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \dots + (\ln n)^2}$$

**Exercice 63** [ 00664 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $a \in ]0; 1[$ . Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 0} a^{\sqrt{n}}$ .

**Exercice 64** [ 01063 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

**Exercice 65** [ 01066 ] [\[Correction\]](#)

Pour  $\alpha > 1$ , on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Étudier, selon  $\alpha$ , la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$ .

**Exercice 66** [ 01067 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série divergente de réels strictement positifs. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer, à l'aide d'une comparaison intégrale que pour tout  $\alpha > 1$ , il y a convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

**Exercice 67** [ 01068 ] [\[Correction\]](#)

Pour  $\alpha > 1$  on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Déterminer la limite de  $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $1^+$

**Exercice 68** [ 01061 ] [\[Correction\]](#)

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3}n\sqrt{n} \quad \text{b) } \ln(n!) \sim n \ln n \quad \text{c) } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \sim \ln(\ln n)$$

**Exercice 69** [ 01069 ] [\[Correction\]](#)

En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$$

**Exercice 70** [ 02431 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $a > 0, b > 0$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a + bk), B_n = \prod_{k=1}^n (a + bk)^{1/n}$$

Trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{A_n}$  en fonction de  $e$ .

**Exercice 71** [ 02434 ] [\[Correction\]](#)

Soit, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}$$

a) Nature la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n)$$

b) Nature de la série de terme général  $f(n)$ .  
(indice : on pourra montrer que  $\sin(n^{1/3})$  n'admet pas de limite quand  $n \rightarrow +\infty$ )

c) Nature de la série de terme général

$$\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}$$

**Exercice 72** [ 02810 ] [\[Correction\]](#)

On pose  $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$  pour tout  $x \geq 1$  et  $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

- Montrer que  $f'$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .
- Montrer que la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.
- Montrer que la suite  $(\cos(\ln n))$  diverge.
- En déduire la nature de la série de terme général  $f(n)$ .

**Exercice 73** [ 03449 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $f: [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f'$  est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

- Montrer que la série numérique  $\sum f(n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(\int_1^n f(t) dt)$  converge.
- Application : Étudier la convergence de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$$

**Exercice 74** [ 03045 ] [\[Correction\]](#)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit

$$f_n: x \in ]n; +\infty[ \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}$$

Soit  $a > 0$ . Montrer qu'il existe un unique réel, noté  $x_n$  tel que  $f_n(x_n) = a$ .  
Déterminer un équivalent de  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 75** [ 03086 ] [\[Correction\]](#)

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right)$$

**Exercice 76** [ 04069 ] [\[Correction\]](#)Soit  $f: [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue, positive et croissante.

Établir que les objets suivants ont même nature

$$\int_0^{+\infty} f(e^{-t}) dt, \sum f(e^{-n}) \text{ et } \sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Comportement asymptotique de sommes****Exercice 77** [ 01032 ] [\[Correction\]](#)

Montrer la convergence de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

puis la majoration du reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n \cdot n!}$$

**Exercice 78** [ 01059 ] [\[Correction\]](#)Soit  $\alpha < 1$ . Déterminer un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

**Exercice 79** [ 01060 ] [\[Correction\]](#)Soit  $\alpha > 1$ . Donner un équivalent simple à

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

**Exercice 80** [ 01089 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$$

a) Donner un équivalent simple de  $S_n$ .

b) Montrer que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + C + o(1)$$

**Exercice 81** [ 01090 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$$

a) Montrer que  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge vers une constante  $C$ .

b) Établir que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} C - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 82** [ 03070 ] [\[Correction\]](#)

Former un développement asymptotique à deux termes de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

**Exercice 83** [ 03179 ] [\[Correction\]](#)a) Sous réserve d'existence, déterminer pour  $\alpha \geq 1$ 

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha}$$

b) Sous réserve d'existence, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

**Exercice 84** [ 01091 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$u_n = \prod_{k=1}^n \frac{3k-1}{3k}$$

a) Montrer qu'il existe des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$\ln u_n = \alpha \ln n + \beta + o(1)$$

En déduire un équivalent de  $u_n$ .b) Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .**Exercice 85** [ 03882 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n}$$

**Exercice 86** [ 01092 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer un équivalent simple de :

a)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$

b)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$

**Exercice 87** [ 03226 ] [\[Correction\]](#)Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$n_p = \min \{n \in \mathbb{N} \mid H_n \geq p\}$$

Déterminer un équivalent de  $n_p$  quand  $p \rightarrow +\infty$ **Exercice 88** [ 01325 ] [\[Correction\]](#)Soit  $j \in \mathbb{N}$ . On note  $\Phi_j$  le plus petit entier  $p \in \mathbb{N}^*$  vérifiant

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j$$

a) Justifier la définition de  $\Phi_j$ .b) Démontrer que  $\Phi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$ .c) Démontrer  $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} e$ .**Exercice 89** [ 02950 ] [\[Correction\]](#)Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}_+^*$ .

On pose

$$v_n = \frac{1}{nu_n} \left( \sum_{k=1}^n u_k \right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n} \left( \sum_{k=1}^n k u_k \right)$$

On suppose que  $(v_n)$  tend vers  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .Étudier la convergence de  $(w_n)$ .**Exercice 90** [ 04062 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

a) Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right)$$

On pose

$$\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[ \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right]$$

b) Établir

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$$

avec  $\varepsilon_n$  qu'on exprimera à l'aide du reste d'une série convergente.

c) En déduire

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

## Nature de séries dépendant d'un paramètre

### Exercice 91 [ 01082 ] [Correction]

Étudier en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature de

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$$

### Exercice 92 [ 01062 ] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

### Exercice 93 [ 01065 ] [Correction]

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R})$$

Même question avec la série de terme général  $(-1)^n u_n$ .

### Exercice 94 [ 02795 ] [Correction]

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$$

Nature de la série de terme général  $u_n$  ?

### Exercice 95 [ 02792 ] [Correction]

Nature de la série de terme général

$$\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^n \ln^2 k}$$

où  $\alpha$  est réel.

### Exercice 96 [ 01081 ] [Correction]

Déterminer en fonction du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature des séries de termes généraux :

a)  $u_n = e^{-n^\alpha}$

b)  $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$

c)  $u_n = \exp(-(\ln n)^\alpha)$

### Exercice 97 [ 01083 ] [Correction]

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

### Exercice 98 [ 01084 ] [Correction]

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

### Exercice 99 [ 01085 ] [Correction]

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels  $a, b, c$  pour qu'il y ait convergence de la suite de terme général

$$\frac{a}{\sqrt{1}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{4}} + \frac{b}{\sqrt{5}} + \frac{c}{\sqrt{6}} + \cdots$$

### Exercice 100 [ 01086 ] [Correction]

Soit  $\lambda$  un réel. Étudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{\lambda^n}{1 + \lambda^{2n}}, v_n = \frac{\lambda^{2n}}{1 + \lambda^{2n}}, w_n = \frac{1}{1 + \lambda^{2n}}$$

### Exercice 101 [ 01088 ] [Correction]

Déterminer en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , la nature de

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

**Exercice 102** [ 01087 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $\alpha > 0$ . Préciser la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$$

**Exercice 103** [ 02515 ] [\[Correction\]](#)

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln \left( 1 + \sin \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

pour  $\alpha > 0$ .

**Exercice 104** [ 02790 ] [\[Correction\]](#)

Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^a} \right)$$

où  $a > 0$ .

**Exercice 105** [ 02791 ] [\[Correction\]](#)

Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln \left( \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}} \right)$$

où  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 106** [ 02430 ] [\[Correction\]](#)

On note  $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$ .

- Déterminer la limite de  $u_n$ .
- Trouver une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n+2}$ .
- Donner la nature de la série de terme général  $(-1)^n u_n$ .
- Discuter suivant  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la nature de la série de terme général  $u_n/n^\alpha$ .

**Exercice 107** [ 02798 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  telle que  $f(0) \neq 0$ . Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1/n} f(t^n) dt$$

**Exercice 108** [ 02799 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $\alpha > 0$  et  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$u_n^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

La série de terme général  $u_n$  converge-t-elle ?

**Exercice 109** [ 02802 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$u_n = a \sum_{k=1}^n 1/k^\alpha$$

- Pour quels couples  $(a, \alpha)$  la suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note  $\ell = \lim u_n$  et on pose, si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$v_n = u_n - \ell$$

- Nature des séries de termes généraux  $v_n$  et  $(-1)^n v_n$ .

**Exercice 110** [ 03429 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $\alpha > 0$ . Déterminer la nature des séries de termes généraux

$$v_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha} \text{ et } w_n = (-1)^n \binom{n+p}{p}^{-\alpha}$$

**Exercice 111** [ 03704 ] [\[Correction\]](#)

- En posant  $x = \tan t$ , montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

b) Donner en fonction de  $\alpha > 0$  la nature de la série

$$\sum \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$$

d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$$

### Exercice 112 [ 02423 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$$

a) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$  selon  $\alpha$ .

b) Déterminer la nature de la série de terme général  $v_n$  selon  $\alpha$ .

### Exercice 113 [ 03104 ] [\[Correction\]](#)

On note  $a_n$  le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier  $n \geq 1$ . Pour quelles valeurs de  $x \in \mathbb{R}$  y a-t-il convergence de la série

$$\sum \frac{x^{a_n}}{n^3}?$$

## Calcul de somme

### Exercice 114 [ 01049 ] [\[Correction\]](#)

Existence et valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  sachant  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

### Exercice 115 [ 01048 ] [\[Correction\]](#)

Nature puis somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

### Exercice 116 [ 01047 ] [\[Correction\]](#)

On donne  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Calculer

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

après en avoir justifié l'existence.

### Exercice 117 [ 03895 ] [\[Correction\]](#)

Existence et valeur de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

### Exercice 118 [ 03633 ] [\[Correction\]](#)

Existence et calcul de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

### Exercice 119 [ 01058 ] [\[Correction\]](#)

En utilisant la formule de Stirling, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

### Exercice 120 [ 01050 ] [\[Correction\]](#)

Sachant  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ , calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

### Exercice 121 [ 02806 ] [\[Correction\]](#)

Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

**Exercice 122** [ 02426 ] [\[Correction\]](#)Calculer pour  $x \in ]-1; 1[$ 

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

**Exercice 123** [ 03448 ] [\[Correction\]](#)Existence et valeur pour  $m \geq 1$  de

$$S_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+m)}$$

**Exercice 124** [ 03622 ] [\[Correction\]](#)

Calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

**Exercice 125** [ 01057 ] [\[Correction\]](#)Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

- a) Montrer que  $a_p$  existe puis exprimer  $a_p$  en fonction de  $a_0, \dots, a_{p-1}$ .  
 b) En déduire que  $a_p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 126** [ 02801 ] [\[Correction\]](#)Soient  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^*$ ,  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ . On pose

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} u_n$$

Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$  et calculer éventuellement sa somme.

**Exercice 127** [ 01053 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$$

Montrer que la série  $\sum u_n$  converge et que sa somme vaut

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

**Exercice 128** [ 03796 ] [\[Correction\]](#)Convergence et somme de la série  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2-1}$ .  
Convergence et somme de

$$\sum_{k \geq 2} \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k}$$

**Exercice 129** [ 02803 ] [\[Correction\]](#)

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1}$$

**Calcul de somme par la constante d'Euler****Exercice 130** [ 01055 ] [\[Correction\]](#)

Justifier et calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$$

**Exercice 131** [ 02354 ] [\[Correction\]](#)

Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$$

**Exercice 132** [ 01046 ] [\[Correction\]](#)

Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

**Exercice 133** [ 01054 ] [\[Correction\]](#)On rappelle l'existence d'une constante  $\gamma$  telle qu'on ait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

- a) Calculer la somme de la série de terme général  $u_n = (-1)^{n-1}/n$ .  
 b) Même question avec  $u_n = 1/n$  si  $n \neq 0$  [3] et  $u_n = -2/n$  sinon.

**Exercice 134** [ 02804 ] [\[Correction\]](#)

Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$$

**Exercice 135** [ 02964 ] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right)$$

**Exercice 136** [ 01056 ] [\[Correction\]](#)

- a) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n = \sum_{p=2}^n \frac{\ln p}{p}$$

On pourra introduire la fonction  $f: t \mapsto (\ln t)/t$ .

- b) À l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

**Exercice 137** [ 02428 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- a) Nature des séries de termes généraux  $f(n)$  puis  $(-1)^n f(n)$ .  
 b) Montrer la convergence de la série de terme général

$$f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt$$

- c) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n)$$

Indice : On pourra s'intéresser à la quantité

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

**Calcul de somme par dérivation ou intégration****Exercice 138** [ 01052 ] [\[Correction\]](#)Soit  $\alpha > 0$ . Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k + \alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

**Exercice 139** [ 01051 ] [\[Correction\]](#)Soit  $x \in ]-1; 1[$ . Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$$

**Exercice 140** [ 02805 ] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

**Exercice 141** [ 01338 ] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

**Application à l'étude de suites****Exercice 142** [ 01070 ] [\[Correction\]](#)

Calculer la limite de

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right)$$

**Exercice 143** [ 02809 ] [\[Correction\]](#)

On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

- Montrer que la suite  $(a_n)$  converge et trouver sa limite  $\lambda$ .
- Trouver un équivalent simple de  $a_n - \lambda$ .

**Exercice 144** [ 01072 ] [\[Correction\]](#)Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

- Déterminer un équivalent de

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

En déduire que  $u_n \rightarrow 0$ .

- En s'inspirant de ce qui précède, établir que  $\sqrt{n}u_n \rightarrow C > 0$  (on ne cherchera pas expliciter la valeur de  $C$ ).

**Exercice 145** [ 01073 ] [\[Correction\]](#)Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

- Déterminer un équivalent de  $\ln u_{n+1} - \ln u_n$ . En déduire que  $u_n \rightarrow 0$ .

- Montrer que  $nu_n \rightarrow +\infty$ . En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

- On pose  $v_n = \frac{u_n}{n+1}$ . En observant et en sommant les égalités  $(2k+4)v_{k+1} = (2k+1)v_k$  calculer  $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$  en fonction de  $n$  et  $v_{n+1}$ . En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$$

**Exercice 146** [ 01078 ] [\[Correction\]](#)Soient  $0 < a < b$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement positive telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

- Montrer que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On pourra étudier  $\ln(u_n)$ .
- Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $v_n = n^\alpha u_n$ . En étudiant  $(v_n)_{n \geq 1}$ , montrer qu'il existe  $A > 0$  tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{n^{b-a}}$$

- On suppose  $b - a > 1$ . En écrivant

$$(n+1)u_{n+1} - nu_n = au_n + (1-b)u_{n+1}$$

donner la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

**Exercice 147** [ 01080 ] [\[Correction\]](#)Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

- Pour quel(s)  $\beta \in \mathbb{R}$  y a-t-il convergence de la série de terme général

$$v_n = \ln \frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} ?$$

- En déduire qu'il existe  $A \in \mathbb{R}_+^*$  pour lequel

$$u_n \sim An^\alpha$$

**Exercice 148** [ 01079 ] [Correction]

Pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^{-*}$ , on considère  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = (1 + \alpha/n) u_n$$

- a) Pour quel(s)  $\beta \in \mathbb{R}$  y a-t-il convergence de la série de terme général

$$v_n = \ln \left( \frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} \right) ?$$

- b) En déduire qu'il existe  $A \in \mathbb{R}_+^*$  pour lequel  $u_n \sim An^\alpha$ .

**Exercice 149** [ 01074 ] [Correction]

Montrer que

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$

a une limite non nulle.

**Exercice 150** [ 01077 ] [Correction]

Étudier la limite de

$$u_n = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du + \ln n$$

**Exercice 151** [ 01075 ] [Correction]

Soit

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left( 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)$$

Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$P_n \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$$

**Exercice 152** [ 01071 ] [Correction]

Soit  $a > 0$ .

- a) Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{n!}$$

- b) Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?

**Exercice 153** [ 02429 ] [Correction]

On fixe  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right)$$

- a) Étudier la suite de terme général  $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge et préciser sa limite.  
b) Établir l'existence de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que la série de terme général :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

converge.

- c) Établir l'existence de  $A \in \mathbb{R}^*$  tel que  $u_n \sim An^\alpha$ .  
d) Étudier la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

**Exercice 154** [ 02784 ] [Correction]

Soit  $u_0 \in ]0; 2\pi[$  puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n/2)$$

- a) Montrer que  $(u_n)$  tend vers 0.  
b) Montrer que  $\lim(2^n u_n) = A$  pour un certain  $A > 0$ .  
c) Trouver un équivalent simple de  $(u_n - A2^{-n})$ .

**Exercice 155** [ 03047 ] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite complexe telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{pn} - u_n \rightarrow 0$ . Peut-on affirmer que la suite  $(u_n)$  converge ?

**Exercice 156** [ 02418 ] [Correction]

Former un développement asymptotique à trois termes de la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$$

**Exercice 157** [ 02949 ] [\[Correction\]](#)

Étudier la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

**Exercice 158** [ 03057 ] [\[Correction\]](#)

On note  $(z_n)_{n \geq 1}$  la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$$

Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2n-1}{z_n-1} \frac{2n-2}{z_n-2} \cdots \frac{2n-n}{z_n-n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \prod_{k=1}^n \frac{2n-k}{z_n-k} \right|$$

## Etude théorique

**Exercice 159** [ 01033 ] [\[Correction\]](#)

Montrer que la somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente n'est que semi-convergente.

**Exercice 160** [ 02962 ] [\[Correction\]](#)

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

**Exercice 161** [ 03097 ] [\[Correction\]](#)

On dit que la série de terme général  $u_n$  enveloppe le réel  $A$  si, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } |A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)| \leq |u_{n+1}|$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel  $A$  s'il existe une suite  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $]0; 1[$  telle que pour tout entier naturel  $n$  :

$$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \theta_{n+1} u_{n+1}$$

- Donner un exemple de série divergente qui enveloppe  $A > 0$ .  
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.  
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.

- Démontrer que, si la série de terme général  $u_n$  enveloppe strictement  $A$ , alors elle est alternée.

Démontrer que  $A$  est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

- Démontrer que, si la série de terme général  $u_n$  est alternée et que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$

$A - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$  est du signe de  $u_{n+1}$ , alors, elle enveloppe strictement  $A$ .

- Démontrer que, si la série de terme général  $u_n$  enveloppe  $A$  et si la suite de terme général  $|u_n|$  est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement  $A$ .

**Exercice 162** [ 03207 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \geq 0}$  telles que

$$u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n$$

- Montrer que  $E$  est un espace vectoriel de dimension 2.
- Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $E$  déterminés par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

Montrer que les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  divergent vers  $+\infty$ .

- Calculer

$$w_n = a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}$$

- On pose  $c_n = a_n/b_n$  lorsque l'entier  $n$  est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

- Démontrer l'existence d'un unique réel  $r$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + rb_n) = 0$$

**Exercice 163** [ 02538 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0; +\infty[$  telle que  $f''$  est intégrable sur  $[0; +\infty[$  et telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  soit convergente.

- Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b) Étudier les séries

$$\sum f(n) \text{ et } \sum f'(n)$$

**Exercice 164** [ 03917 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante à termes strictement positifs telle que la série  $\sum e_n$  converge.

On pose

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n \text{ et } r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

On introduit

$$G = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \mid (d_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

On dit que la suite  $e$  est une base discrète lorsque  $G$  est un intervalle.

- Montrer que  $G$  est bien défini. Déterminer son maximum et son minimum.
- On suppose dans cette question que  $(e_n)$  est une base discrète. Montrer que  $e_n \leq r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- On suppose que  $e_n \leq r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $t \in [-s; s]$ . On définit la suite  $(t_n)$  par

$$t_0 = 0 \text{ et } t_{n+1} = \begin{cases} t_n + e_n & \text{si } t_n \leq t \\ t_n - e_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$|t - t_n| \leq e_n + r_n$$

et conclure.

- Dans cette question, on suppose  $e_n = 1/2^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $G$ . Quelles suites  $(d_n)$  permettent d'obtenir respectivement 0, 1, 1/2, 2 et 1/3 ?  
Pour  $x \in G$ , y a-t-il une unique suite  $(d_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n ?$$

## Transformation d'Abel

**Exercice 165** [ 01043 ] [\[Correction\]](#)

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \sin k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k}$$

- Montrer que  $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$  est bornée.
- En déduire que  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge.

**Exercice 166** [ 02352 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  non multiple de  $2\pi$ . On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$$

- Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.
- En observant que  $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$ , établir que la série de terme général  $u_n$  converge.
- En exploitant l'inégalité  $|\cos x| \geq \cos^2 x$ , établir que la série de terme général  $|u_n|$  diverge.

**Exercice 167** [ 01041 ] [\[Correction\]](#)

Soient  $(a_n)$  une suite positive décroissante de limite nulle et  $(S_n)$  une suite bornée.

- Montrer que la série  $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$  est convergente.
- En déduire que la série  $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$  est convergente.
- Établir que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , la série  $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$  est convergente.

**Exercice 168** [ 02582 ] [\[Correction\]](#)

- Montrer l'existence, pour  $\theta \in ]0; \pi[$ , d'un majorant  $M_\theta$  de la valeur absolue de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$$

- b) Montrer que  $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$  est décroissante sur  $[2; +\infty[$ .
- c) En remarquant que  $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$ , étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\theta)$$

- d) En utilisant  $|\cos(k\theta)| \geq \cos^2(k\theta)$ , étudier la convergence de  $\sum |u_n|$ .

### Exercice 169 [01042] [Correction]

Soit  $z_n$  le terme général d'une série complexe convergente. Établir la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n}$$

### Exercice 170 [03684] [Correction]

Soit  $z_n$  le terme général d'une série complexe convergente. Établir

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{z_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

### Exercice 171 [03685] [Correction]

Soit  $(a_n)$  une suite complexe. On suppose que la série  $\sum \frac{a_n}{n}$  diverge. Établir que pour tout  $\alpha \in ]-\infty; 1]$ , la série  $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$  diverge aussi.

### Exercice 172 [01028] [Correction]

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite décroissante de réels strictement positifs.

- a) On suppose que  $\sum u_n$  converge. Montrer que la série de terme général  $v_n = n(u_n - u_{n+1})$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

- b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général  $n(u_n - u_{n+1})$  converge. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge si, et seulement si, la suite  $(u_n)$  converge vers 0.
- c) Donner un exemple de suite  $(u_n)$  qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général  $n(u_n - u_{n+1})$  converge.

### Exercice 173 [03673] [Correction]

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite décroissante de réels de limite nulle.

Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum n(u_n - u_{n+1})$  ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

### Exercice 174 [03879] [Correction]

On donne une suite réelle  $(a_n)$ .

On suppose que les séries  $\sum a_n$  et  $\sum |a_{n+1} - a_n|$  convergent. Montrer que la série  $\sum a_n^2$  converge.

## Théorème de Cesaro

### Exercice 175 [00307] [Correction]

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . On désire établir que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers  $\ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

- a) Justifier qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$  entraîne

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$$

- b) Établir que pour tout entier  $n > n_0$  on a :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2}$$

- c) En déduire qu'il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_1$  entraîne

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- d) Application : Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $u_{n+1} - u_n \rightarrow \alpha \neq 0$ . Donner un équivalent simple de  $u_n$ .

### Exercice 176 [00308] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

a) On suppose que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  et on considère

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$$

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

b) On suppose

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{n} \rightarrow \ell$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^2}$$

### Exercice 177 [ 00309 ] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs.

On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in ]0; +\infty[$$

Montrer

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$$

### Exercice 178 [ 03219 ] [Correction]

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est définie par  $u_0 > 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

a) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$

b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

c) En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \geq 0}$

### Exercice 179 [ 03220 ] [Correction]

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est définie par  $u_0 \in ]0; \pi/2[$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

a) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$

b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

c) En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \geq 0}$

### Exercice 180 [ 03850 ] [Correction]

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs convergente. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

et on suppose

$$u_n \sim R_n^2$$

Déterminer un équivalent de  $u_n$ .

## Condensation

### Exercice 181 [ 02796 ] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}$$

Déterminer la nature de  $\sum v_n$  en fonction de celle de  $\sum u_n$ .

### Exercice 182 [ 03676 ] [Correction]

[Critère de condensation de Cauchy]

a) Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle décroissante, positive et  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq 2$ .

On pose

$$v_n = p^n u_{p^n}$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge}$$

b) Application : Étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \text{ et } \sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

**Exercice 183** [ 03677 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = nu_n^2$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge}$$

**Exercice 184** [ 02797 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante d'éléments de  $\mathbb{R}_+$ , de limite 0. Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$v_n = n^2 u_n^2$$

Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  ?

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- a)  $u_n \sim \frac{1}{n}$  donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.
- b)  $u_n \sim \frac{e^n}{e^{2n}} \sim e^{-n}$  donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est convergente.
- c)  $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la série est absolument convergente.
- d)  $u_n \sim \frac{e}{2n}$  donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.

### Exercice 2 : [énoncé]

- a)  $u_n = \exp(-n^2 \ln(1 + 1/n)) = \exp(-n + o(n))$  donc  $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et la série est absolument convergente.
- b)  $u_n \geq 1/n$  donc par comparaison de séries à termes positifs, la série est divergente.
- c)  $n^2 u_n = \frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}} = e^{2 \ln(n) - \ln(n) \ln(\ln n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc la série est absolument convergente.

### Exercice 3 : [énoncé]

On a

$$nu_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left[-\frac{1}{n} \ln n\right] \rightarrow 1$$

donc pour  $n$  assez grand

$$u_n \geq \frac{1}{2n}$$

et par comparaison de série à termes positifs on peut affirmer que  $\sum u_n$  diverge.

### Exercice 4 : [énoncé]

C'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées car

$$\sum_{k=1}^n u_k \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < +\infty$$

donc la série converge.

### Exercice 5 : [énoncé]

On a

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n = n + O(1) \sim n$$

donc

$$\frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui permet de conclure à une absolue convergence.

### Exercice 6 : [énoncé]

- a) L'intégrale définissant  $u_n$  est bien définie car elle porte sur une fonction sur le segment  $[0; 1]$ . On peut aussi la comprendre comme une intégrale impropre convergente sur  $[0; 1[$

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x + \dots + x^n} = \int_{[0;1[} \frac{dx}{1 + x + \dots + x^n}$$

et par sommation géométrique

$$\int_{[0;1[} \frac{dx}{1 + x + \dots + x^n} = \int_{[0;1[} \frac{1-x}{1-x^{n+1}} dx$$

Posons

$$f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}$$

Sur  $[0; 1[$ , la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f: x \mapsto 1-x$ .

Les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues par morceaux et

$$\left| \frac{1-x}{1-x^{n+1}} \right| \leq \frac{1-x}{1-x} = 1 = \varphi(x)$$

avec  $\varphi$  intégrable. Par convergence dominée

$$u_n \rightarrow \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

et donc la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

b) On amorce les calculs comme au dessus pour écrire

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x) dx$$

Par intégration par parties impropre justifiée par deux convergences

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x) dx = \left[ -\frac{1}{n+1} \ln(1-x^{n+1})(1-x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

Le terme entre crochet est nul (il suffit d'écrire  $x = 1-h$  avec  $h \rightarrow 0$ , pour étudier la limite en 1)

Il reste

$$v_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(1-x^{n+1}) dx$$

Par développement en série entière de la fonction  $u \mapsto -\ln(1-u)$

$$v_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^{(n+1)k} dx$$

Posons

$$g_k(x) = \frac{1}{k} x^{(n+1)k}$$

La série de fonctions  $\sum g_k$  converge simplement sur  $[0; 1[$  en vertu de la décomposition en série entière précédente.

Les fonctions  $g_k$  et la fonction somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k : x \mapsto -\ln(1-x^{n+1})$  sont continues par morceaux.

Enfin, les fonctions  $g_k$  sont intégrables sur  $[0; 1[$  et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{k} x^{(n+1)k} \right| dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty$$

On peut donc intégrer terme à terme pour écrire donc

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^{(n+1)k} dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \leq \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

puis finalement

$$v_n \leq \frac{C}{(n+1)^2}$$

La série à termes positifs  $\sum v_n$  est donc convergente.

### Exercice 7 : [énoncé]

On sait

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

et donc

$$a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = e^{\ln a \ln n + \gamma \ln a + o(1)} \sim \frac{e^{\gamma \ln a}}{n^{-\ln a}}$$

Par équivalence de séries à termes positifs

$$\sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \text{ converge} \iff -\ln a > 1$$

ce qui fournit la condition  $a < e^{-1}$ .

### Exercice 8 : [énoncé]

a) Posons  $v_n = n^\alpha u_n$ .

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série  $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$  est donc absolument convergente et par conséquent la suite  $(\ln v_n)$  converge.

Ainsi,  $v_n \rightarrow e^\ell > 0$  avec  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n$  puis

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{n^\alpha}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

b) On reprend ce qui précède en l'approfondissant...

Puisque le reste d'une série dont le terme général est en  $O(1/n^2)$  est en  $O(1/n)$ , on a

$$\ln v_n = \ell + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$u_n = \frac{e^\ell}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Pour que  $\sum (-1)^n u_n$  converge, il est nécessaire que  $u_n \rightarrow 0$  et donc  $\alpha > 0$ .

Inversement, si  $\alpha > 0$  alors la série  $\sum (-1)^n \frac{e^\ell}{n^\alpha}$  converge par le critère spécial et la série  $\sum O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$  converge absolument.

Finalement, la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

### Exercice 9 : [énoncé]

a) Via télescopage, on obtient pour tout  $n \geq N$

$$0 < u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$$

donc  $u_n = O(v_n)$ .

b) Soit  $1 < \beta < \alpha$  et  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ .

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

À partir d'un certain rang

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

donc  $u_n = O(v_n)$  or  $\sum v_n$  converge absolument donc  $\sum u_n$  aussi.

c) Pour  $n$  assez grand

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1/(n+1)}{1/n}$$

donc

$$\frac{1}{n} = O(u_n)$$

Puisque la série  $\sum 1/n$  est divergente, un argument de comparaison de séries à termes positifs permet de conclure que  $\sum u_n$  est aussi divergente.

### Exercice 10 : [énoncé]

a) Le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers 1 donc la suite  $(u_n)$  est de signe constant à partir d'un certain rang; quitte à passer à l'opposé on peut supposer  $u_n > 0$  pour  $n$  assez grand.

Posons

$$w_n = \ln((n+1)^\lambda u_{n+1}) - \ln(n^\lambda u_n)$$

On a

$$w_n = \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + v_n\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente. Par conséquent la suite  $(\ln(n^\lambda u_n))$  converge et donc  $(n^\lambda u_n)$  aussi.

b) Posons  $u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$ . On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En reprenant l'étude qui précède on peut affirmer que  $n^{1/2} u_n \rightarrow \ell > 0$  donc  $\sum u_n$  diverge.

Ce résultat peut être confirmé par la formule de Stirling.

### Exercice 11 : [énoncé]

a)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+1}{3(n+1)} = 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{(1+1/n)^{3/4}} = 1 - \frac{3}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc pour  $n$  assez grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

b) La suite de terme général  $\frac{u_n}{v_n}$  est positive et croissante à partir d'un certain rang donc il existe  $\alpha > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq \alpha v_n$ . Or  $\sum v_n$  diverge donc  $\sum u_n$  aussi.

**Exercice 12 :** [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{j^{3n+3}}{\sqrt{3n+3}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{j^{3n+1}(1+j+j^2)}{\sqrt{3n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc la série des termes

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{j^{3n+3}}{\sqrt{3n+3}}$$

est absolument convergente. Ainsi, il y a convergence des sommes partielles

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{j^k}{\sqrt{k}}$$

Puisque, les termes

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}, \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}$$

sont de limite nulle, on a aussi convergence des sommes partielles

$$S_{3n+1} = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{j^k}{\sqrt{k}} = S_{3n} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}$$

$$S_{3n+1} = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{j^k}{\sqrt{k}} = S_{3n+1} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}$$

Les trois suites extraites  $(S_{3n})$ ,  $(S_{3n+1})$  et  $(S_{3n+2})$  convergent vers une même limite, on peut affirmer que la série  $\sum \frac{j^n}{\sqrt{n}}$  est convergente.

**Exercice 13 :** [\[énoncé\]](#)

- $|u_n| \sim 1/n^2$  donc la série  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.
- On applique le critère spécial et on conclut que  $\sum u_n$  converge.
- $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et on peut conclure que  $\sum u_n$  converge.
- 

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 14 :** [\[énoncé\]](#)

Il s'agit d'une série alternée.

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$$

et ainsi  $\ln \sqrt[n]{n!}$  est la moyenne arithmétique de  $\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n$  et donc

$$\ln \sqrt[n]{n!} \leq \ln \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

De plus par la croissance de la fonction  $x \mapsto \ln x$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k \geq \frac{1}{n} \int_1^n \ln x \, dx = \ln n - 1 \rightarrow +\infty$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$$

Finalement on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et conclure.

**Exercice 15 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{n} = \frac{(-1)^n \pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc la série est semi-convergente.

**Exercice 16 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

donc

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

puis

$$u_n = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le terme général  $u_n$  est somme d'un terme définissant une série convergente par le critère spécial et d'un terme définissant une série convergent absolument.

**Exercice 17 :** [\[énoncé\]](#)

Par comparaison avec une intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

La série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

converge en vertu du critère spécial.

On a

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right) \sim \frac{1}{4n}$$

donc par comparaison de série à termes positifs il y a divergence de la série de terme général

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + o\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right)$$

Par sommation d'une série convergente et d'une série divergente la série de terme général diverge.

**Exercice 18 :** [\[énoncé\]](#)

a) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc  $\sum u_n$  converge.

b) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{n \ln^2 n} + o\left(\frac{1}{n \ln^2 n}\right)$$

Or la série de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln^2 n}$  est absolument convergente (utiliser une comparaison avec une intégrale) donc  $\sum u_n$  est convergente.

c) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$$

La série de terme général  $\frac{(-1)^n}{\ln n}$  est convergente alors que la série de terme général  $\frac{1}{(\ln n)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$  est divergente par équivalence de séries à termes positifs. On conclut que  $\sum u_n$  est divergente.

**Exercice 19 :** [\[énoncé\]](#)

$\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  est terme général d'une série convergente.

**Exercice 20 :** [\[énoncé\]](#)

En développant par la formule du binôme de Newton

$$(2 + \sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k$$

puis en simplifiant les termes d'indices impairs

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-2p} 3^p \in 2\mathbb{Z}$$

On en déduit

$$u_n = -\sin\left((2 - \sqrt{3})^n \pi\right)$$

Puisque  $|2 - \sqrt{3}| < 1$ ,

$$u_n \sim -(2 - \sqrt{3})^n \pi$$

est terme général d'une série absolument convergente.

**Exercice 21 :** [\[énoncé\]](#)

Puisque  $u_n \rightarrow 0$ , il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

Or

$$v_n = \frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} + \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1}$$

D'une part

$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe  $c$  compris entre  $\ln 2n$  et  $\ln(2n+1)$  tel que

$$\frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1} = \frac{\cos(c)(\ln(2n+1) - \ln 2n)}{2n+1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que  $v_n = O(1/n^2)$  et donc la série de terme général  $v_n$  est absolument convergente donc convergente.

**Exercice 22 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(\ln k)}{k}$$

Pour les entiers  $k$  appartenant à l'intervalle

$$[e^{-\pi/4+2n\pi}; e^{\pi/4+2n\pi}]$$

on a

$$\frac{\cos(\ln k)}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{e^{\pi/4+2n\pi}}$$

Posons

$$a_n = E\left(e^{-\pi/4+2n\pi}\right) \text{ et } b_n = E\left(e^{\pi/4+2n\pi}\right)$$

On a

$$S_{a_n} - S_{b_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{\cos(\ln k)}{k} \geq \frac{b_n - a_n}{\sqrt{2}} \frac{1}{e^{\pi/4+2n\pi}}$$

Or, par encadrement,

$$\frac{b_n - a_n}{e^{\pi/4+2n\pi}} \rightarrow (1 - e^{-\pi/2})$$

donc  $(S_{a_n} - S_{b_n})$  ne tend pas vers 0. Or  $a_n, b_n \rightarrow +\infty$  donc la série étudiée ne peut converger.

**Exercice 23 :** [\[énoncé\]](#)

Montrons que la série étudiée est divergente. Notons  $S_n$  la somme partielle de rang  $n$  de cette série. Nous allons construire deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de limite  $+\infty$  telles que  $S_{b_n} - S_{a_n}$  ne tend pas zéros ce qui assure la divergence de la série étudiée.

Soit  $n \geq 1$  fixé. Les indices  $k$  vérifiant

$$2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{k} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\operatorname{Re}(e^{i\sqrt{k}}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Posons alors

$$a_n = E((2n\pi - \pi/4)^2) \text{ et } b_n = E((2n\pi + \pi/4)^2)$$

On a

$$S_{b_n} - S_{a_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{e^{i\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\operatorname{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Puisque la fonction  $t \mapsto 1/\sqrt{t}$  est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\operatorname{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{2} (\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1})$$

Or

$$\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1} = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n+1} + \sqrt{a_n+1}} \sim \frac{2n\pi^2}{4n\pi} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

donc  $S_{b_n} - S_{a_n}$  ne tend pas vers 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

**Exercice 24 :** [\[énoncé\]](#)

Quand  $x \rightarrow 0$ , on a

$$\frac{\sqrt{|x|}}{1+x} = \sqrt{|x|} - x\sqrt{|x|} + o\left(x^{3/2}\right)$$

On en déduit

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \sqrt{|x|} dx - \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} x\sqrt{|x|} dx + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

Par parité

$$u_n = \frac{(-1)^n 2}{3n^{3\alpha/2}} - \frac{2}{5n^{5\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de terme général  $(-1)^n/n^{3\alpha/2}$  converge et par équivalence de séries à termes de signe constant, la série de terme général

$$-\frac{2}{5n^{5\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right) \sim -\frac{2}{5n^{5\alpha/2}}$$

converge si, et seulement si,  $5\alpha/2 > 1$ .

On en déduit que la série de terme général  $u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 2/5$ .

### Exercice 25 : [énoncé]

Supposons la convergence de la série  $\sum u_n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n (u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Puisque  $\sum v_n$  est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, celle-ci converge.

Supposons la convergence de la série  $\sum v_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Puisque  $\sum u_n$  est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, celle-ci converge. En substance, on observe aussi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

### Exercice 26 : [énoncé]

On exploite les comparaisons

$$\max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n, \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

(obtenue par  $2ab \leq (a^2 + b^2)$ )

et

$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n}{u_n + v_n} v_n \leq v_n$$

Par comparaison de série à termes positifs on peut alors conclure.

### Exercice 27 : [énoncé]

Puisque  $2ab \leq a^2 + b^2$  on a

$$\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

or  $\sum u_n$  et  $\sum u_{n+1}$  convergent donc, par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$  converge.

### Exercice 28 : [énoncé]

On a immédiatement (i)  $\implies$  (ii) par comparaison de série à termes positifs sachant

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$$

La réciproque est fausse, il suffit pour l'observer de considérer la suite  $a$  donnée par

$$a_{2p} = 1 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{1}{p^4}$$

### Exercice 29 : [énoncé]

- Si  $\ell > 1$  alors à partir d'un certain rang  $\sqrt[n]{n} u_n \geq 1$  et donc  $u_n \geq 1$ . Il y a divergence grossière.
- Si  $\ell < 1$  alors, en posant  $\alpha = (1 + \ell)/2$ , on a  $\ell < \alpha < 1$  et à partir d'un certain rang

$$\sqrt[n]{n} u_n < \alpha$$

donc

$$u_n \leq \alpha^n$$

Or la série de terme général  $\alpha^n$  est convergente car  $\alpha \in [0; 1[$  et donc  $\sum u_n$  est absolument convergente.

- Pour  $u_n = 1/n$ ,  $\sqrt[n]{n} u_n = n^{-1/n} \rightarrow 1$  et pour  $u_n = 1/n^2$ ,  $\sqrt[n]{n} u_n = n^{-2/n} \rightarrow 1$  alors que dans un cas la série diverge et dans l'autre la série converge.

**Exercice 30 :** [énoncé]

Puisque

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \in [0; 1[ \text{ et } u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$$

on a  $u_n \rightarrow 0$  si, et seulement si,  $v_n \rightarrow 0$ .

Si  $u_n \not\rightarrow 0$  alors  $v_n \not\rightarrow 0$  et les deux séries divergent.

Si  $u_n \rightarrow 0$  alors  $v_n \sim u_n$  et donc les deux séries sont de même nature.

Dans les deux cas, les séries sont de même nature.

**Exercice 31 :** [énoncé]

- a) Si  $\sum u_n$  converge alors  $u_n \rightarrow 0$  et  $v_n \sim u_n$  donc  $\sum v_n$  converge par équivalence de série à termes positifs. Si  $\sum v_n$  converge alors  $v_n \rightarrow 0$  et aisément  $u_n \rightarrow 0$  donc  $v_n \sim u_n$  et on conclut comme ci-dessus.
- b) Si  $\sum u_n$  converge et est de somme  $S$  alors  $v_n \sim u_n/S$  et on peut conclure. Si  $\sum u_n$  diverge alors

$$\sum_{n=2}^N \ln(1-v_n) = \ln \frac{u_1}{u_1 + \dots + u_n} \rightarrow -\infty$$

Si  $v_n \rightarrow 0$ ,  $\ln(1-v_n) \sim -v_n$  donc  $\sum v_n$  diverge car les séries sont de signe constant.

Si  $v_n \not\rightarrow 0$ ,  $\sum v_n$  diverge grossièrement.

**Exercice 32 :** [énoncé]

Supposons la série  $\sum v_n$  convergente. On a  $v_n \rightarrow 0^+$  donc  $1+n^2u_n \rightarrow +\infty$  et on en déduit

$$v_n \sim \frac{1}{n^2 u_n}$$

puis

$$\sqrt{u_n v_n} \sim \frac{1}{n}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, il y a divergence de la série  $\sum \sqrt{u_n v_n}$ .

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left( \sum_{k=0}^n \sqrt{u_k v_k} \right)^2 \leq \sum_{k=0}^n u_n \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_n \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

On en déduit la divergence de la série  $\sum u_n$ .

**Exercice 33 :** [énoncé]

Par permutation de sommes

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{k u_k}{n(n+1)}$$

donc

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N k u_k \sum_{n=k}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{N+1-k}{N+1} u_k$$

et donc

$$\sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - N v_N$$

Supposons que la série  $\sum u_n$  converge

Puisque  $\sum v_n$  est une série à termes positifs et que ses sommes partielles sont majorée car

$$\sum_{n=1}^N v_n \leq \sum_{k=1}^N u_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

la série  $\sum v_n$  converge.

Supposons que la série  $\sum v_n$  converge.

On a

$$n v_n = \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n v_k$$

donc par croissance des sommes partielles d'une série à termes positifs, la suite  $(n v_n)$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Si cette limite est non nulle, la série  $\sum v_n$  diverge ce qui est contraire à l'hypothèse initiale. On en déduit

$$n v_n \rightarrow 0$$

donc

$$\sum_{k=1}^N u_k = \sum_{n=1}^N v_n + N u_n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

Ainsi  $\sum u_n$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

**Exercice 34 :** [énoncé]

Pour  $n \geq 2$ , on observe

$$a_n^{1-1/n} \leq 2a_n \iff a_n \geq \frac{1}{2^n}$$

et donc

$$a_n^{1-1/n} \leq \max(2a_n, \frac{1}{(2^n)^{1-1/n}}) \leq 2 \left( a_n + \frac{1}{2^n} \right)$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure à la convergence de  $\sum a_n^{1-1/n}$ .

**Exercice 35 :** [énoncé]

La série de terme général  $u_n$  est convergente.

En effet, puisque  $\sum a_n$  converge,  $a_n \rightarrow 0$  et donc il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, a_n \leq 1$$

En posant  $M = a_0 a_1 \dots a_{N-1}$ , on peut écrire pour tout  $n \geq N$

$$0 \leq u_n \leq M a_N \dots a_{n-1} a_n \leq M a_n$$

Par comparaison de série à termes positifs, on obtient la convergence voulue.

**Exercice 36 :** [énoncé]

Puisque la suite  $(S_n)$  est croissante

$$0 \leq v_n \leq \frac{u_{n+1}}{S_0} \rightarrow 0$$

et donc  $v_n \rightarrow 0$ . On en tire

$$v_n \sim \ln(1 + v_n) = \ln \frac{S_{n+1}}{S_n} = \ln(S_{n+1}) - \ln(S_n)$$

La série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si, la suite  $\ln(S_n)$  converge et donc si, et seulement si, la série télescopique  $\sum (\ln S_{n+1} - \ln S_n)$  converge. Par équivalence de série à termes positifs, cela équivaut à affirmer la convergence de la série  $\sum v_n$ .

**Exercice 37 :** [énoncé]

Si  $\sum u_n$  converge alors en notant  $S$  sa somme (strictement positive),  $v_n \sim u_n/S$  et donc  $\sum v_n$  converge.

Supposons désormais que  $\sum u_n$  diverge et montrons qu'il en est de même de  $\sum v_n$ .

Par la décroissante de  $t \mapsto 1/t$ , on a

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_{n-1}}$$

En sommant ces inégalités

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{u_k}{S_{k-1}}$$

Or

$$\int_{S_1}^{S_n} \frac{dt}{t} = \ln S_n - \ln S_1 \rightarrow +\infty$$

car  $S_n \rightarrow +\infty$  donc par comparaison  $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$  diverge.

Puisque

$$\frac{u_n}{S_{n-1}} = \frac{u_n}{S_n - u_n} = v_n \frac{1}{1 - v_n}$$

Si  $v_n \not\rightarrow 0$  alors  $\sum v_n$  diverge.

Si  $v_n \rightarrow 0$  alors  $v_n \sim \frac{u_n}{S_{n-1}}$  et à nouveau  $\sum v_n$  diverge.

Finalement  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

**Exercice 38 :** [énoncé]

$u_n = R_{n-1} - R_n$  et la décroissance de  $t \rightarrow 1/t$ ,

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} \leq \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_n}$$

On a

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t} = \ln R_{n-1} - \ln R_n$$

donc la série à termes positifs  $\sum \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t}$  diverge car  $\ln R_n \rightarrow -\infty$  puisque  $R_n \rightarrow 0$ .

Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum u_n/R_n$  diverge.

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{u_n}{R_{n-1} - u_n} = \frac{u_n}{R_{n-1}} \frac{1}{1 - u_n/R_{n-1}}$$

Si  $u_n/R_{n-1} \not\rightarrow 0$  alors  $\sum u_n/R_{n-1}$  diverge.

Si  $u_n/R_{n-1} \rightarrow 0$  alors  $\frac{u_n}{R_{n-1}} \sim \frac{u_n}{R_n}$  et donc  $\sum u_n/R_{n-1}$  diverge encore.

Dans tous les cas,  $\sum u_n/R_{n-1}$  diverge.

**Exercice 39 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

Si  $(u_n)$  converge alors, en posant  $\ell$  sa limite,

$$v_n \sim \frac{1}{\ell} (u_{n+1} - u_n)$$

et puisque la série à termes positifs  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge, il en est de même de  $\sum v_n$ .

Si  $(u_n)$  diverge alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .

Par la décroissance de  $t \rightarrow 1/t$ ,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \geq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

Puisque  $\ln(u_n) \rightarrow +\infty$ , la série à terme positif  $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$  diverge et donc  $\sum v_n$  aussi.

Finalement, la nature de la série  $\sum v_n$  est celle de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 40 :** [\[énoncé\]](#)

a) Puisque la série  $\sum a_n$  converge, on peut introduire sa somme

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Les termes sommés étant strictement positifs, on a  $\ell > 0$  et  $S_n \rightarrow \ell$  donne alors  $S_n \sim \ell$ .

On en déduit

$$\frac{a_n}{S_n} \sim \frac{a_n}{\ell}$$

La série  $\sum a_n$  converge, donc  $\sum a_n/\ell$  converge aussi et par équivalence de séries à termes positifs, on peut conclure à la convergence de la série  $\sum a_n/S_n$ .

b) Comme les termes sont positifs, on a  $S_n \geq S_{n-1}$  et donc

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

La série à termes positifs  $\sum a_n$  étant supposée divergente, la suite  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$  et donc  $1/S_n \rightarrow 0$ .

La nature de la série  $\sum u_n - u_{n-1}$  étant celle de la suite  $(u_n)$ , on peut affirmer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

puis celle de  $\sum a_n/S_n^2$  par comparaison de séries à termes positifs.

c) On peut écrire

$$\frac{a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}$$

Si  $(S_{n-1}/S_n)$  ne tend pas vers 1, la série étudiée diverge grossièrement.

Si  $(S_{n-1}/S_n)$  tend vers 1 alors

$$\ln \frac{S_{n-1}}{S_n} \sim \frac{S_{n-1}}{S_n} - 1$$

et donc

$$\frac{a_n}{S_n} \sim \ln S_n - \ln S_{n-1}$$

La suite  $(\ln S_n)$  diverge, donc la série  $\sum \ln S_n - \ln S_{n-1}$  diverge aussi et, enfin,  $\sum a_n/S_n$  diverge par argument de comparaison de séries à termes positifs.

**Exercice 41 :** [\[énoncé\]](#)

a) Pour  $x$  assez grand, on a

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \geq -1$$

donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \geq -\frac{1}{x}$$

En intégrant, il existe une constante  $\beta$  tel que

$$\ln f(x) \geq -\ln x + \beta$$

et alors

$$f(x) \geq \frac{C}{x} \text{ avec } C = e^\beta > 0$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de  $\sum_{n \geq 1} f(n)$

b) Soit un réel  $\alpha > 1$  tel que  $\ell < -\alpha$ . Pour  $x$  assez grand, on a

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \leq -\alpha$$

et donc

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -\frac{\alpha}{x}$$

En intégrant, il existe une constante  $\beta$  tel que

$$\ln f(x) \leq -\alpha \ln x + \beta$$

et alors

$$f(x) \leq \frac{C}{x^\alpha} \text{ avec } C = e^\beta > 0$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de  $\sum_{n \geq 1} f(n)$

#### Exercice 42 : [énoncé]

a)  $R_n$  est le reste de rang  $n$  de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$  qui converge en vertu du critère spécial.

b) Par décalage d'indice sur la deuxième somme

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

c) Puisque

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

on a

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

Or par le critère spécial

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

d) Comme

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

la série  $\sum R_n$  est convergente.

#### Exercice 43 : [énoncé]

À partir du rang  $n = 2$ , on peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Le reste étant majoré par la valeur absolue du premier terme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!} = 1 - 4 + r$$

avec  $|r| \leq \frac{64}{24}$  donc  $x < 0$ .

#### Exercice 44 : [énoncé]

Par découpage

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

donc par translations

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n\pi + t)}{n\pi + t} dt$$

puis la relation proposée.

$I$  se perçoit alors comme somme d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, sa somme est donc du signe de son premier terme à savoir positif.

#### Exercice 45 : [énoncé]

a) Si  $(v_n)$  est une suite alternée dont la valeur absolue décroît vers 0 alors la série  $\sum v_n$  converge.

Ce résultat s'obtient en constatant l'adjacence des suites extraites de rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles.

b) La suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  converge en vertu du critère spécial énoncé ci-dessus. En fait, il est « connu » que  $(s_n)_{n \geq 1}$  tend vers  $\ln 2$  et donc  $(u_n)_{n \geq 1}$  tend vers 0.

c) On peut écrire

$$s_n = \ln 2 - r_n$$

avec

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

On a

$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } r_n + r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car par, application du critère spécial à la série  $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$ , on peut majorer le reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. On en déduit

$$r_n = \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} x - 1 + O((x-1)^2)$$

et donc

$$u_n = e^{s_n} - 2 + O((e^{s_n} - 2)^2)$$

avec

$$e^{s_n} - 2 = 2(e^{-r_n} - 1) = -2r_n + O(r_n^2) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série  $\sum u_n$  converge car c'est la somme d'une série vérifiant le critère spécial et d'une autre absolument convergente.

#### Exercice 46 : [énoncé]

a) En notant  $S$  la somme de la série,  $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$ .

b) On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq nu_{2n}$$

De plus  $nu_{2n} \geq 0$  car la suite  $(u_n)$  décroît et tend vers 0 (car la série converge).

Par encadrement  $nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  puis  $2nu_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

c) De plus

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq 2nu_{2n} + u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc on a aussi  $(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et finalement  $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

#### Exercice 47 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha u_k$$

Par la décroissance de la suite  $(u_n)$ , on a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} n^\alpha u_{2n} = n^{\alpha+1} u_{2n} \geq 0$$

Puisque la suite  $(S_n)$  converge,  $S_{2n} - S_n \rightarrow 0$  et on en déduit  $(2n)^{\alpha+1} u_{2n} \rightarrow 0$ .  
Puisque

$$0 \leq (2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \leq \frac{(2n+1)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}} (2n)^{\alpha+1} u_{2n}$$

on a aussi  $(2n+1)^{\alpha+1} u_{2n+1} \rightarrow 0$  et on peut donc conclure  $n^{\alpha+1} u_n \rightarrow 0$ .

#### Exercice 48 : [énoncé]

Posons  $v_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_n$ . On a

$$v_{n+1} - v_n = n(u_n - u_{n+1}) \geq 0$$

La suite  $(v_n)$  est croissante et majorée donc convergente. Posons  $\ell$  sa limite.

On a

$$u_n - u_{n+1} = \frac{1}{n} (v_{n+1} - v_n)$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k} (v_{k+1} - v_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k)$$

ce qui donne

$$u_n \leq \frac{1}{n} (\ell - v_n)$$

On en déduit  $0 \leq nu_n \leq \ell - v_n$  et donc  $nu_n \rightarrow 0$  puis  $\sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \ell$ .  
Finalement  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 49 :** [énoncé]

La fonction  $x \mapsto 1 - \cos x - x$  est négative sur  $[0; +\infty[$  et ne s'annule qu'en 0. Par conséquent, la suite  $(u_n)$  est décroissante, or elle est clairement minorée par 0 donc elle converge. Sa limite annulant la précédente fonction ne peut être qu'être 0. Puisque

$$u_{n+1} = 2 \sin^2 \frac{u_n}{2}$$

on a

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n^2$$

Par suite  $u_n = O(1/2^n)$  et donc la série  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 50 :** [énoncé]

Par étude de point fixe de la relation de récurrence, la valeur

$$\ell = (1 + \sqrt{5})/2$$

est la seule limite possible de la suite  $(u_n)$  qui est clairement à termes positifs.

$$|u_{n+1} - \ell| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + \ell}} \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

donc  $u_n = O(1/2^n)$  et ainsi la série converge.

**Exercice 51 :** [énoncé]

a) La suite étudiée est bien définie et à termes tous positifs. On en déduit

$$0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc par encadrement  $u_n \rightarrow 0$ .

- b) Pour  $n \geq 1$ , on peut écrire  $v_n = e^{-u_{n-1}}$  et alors  $v_n \rightarrow 1$  par composition de limites.  
c) On en déduit

$$u_n \sim 1/n$$

La série  $\sum u_n$  est alors divergente par équivalence de séries à termes positifs. On a aussi

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1 - u_{n-1} + o(u_{n-1})}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série  $\sum (-1)^n/n$  converge en vertu du critère spéciale et  $\sum O(1/n^2)$  est absolument convergente par argument de comparaison. Par opération sur les séries convergentes, la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

**Exercice 52 :** [énoncé]

La suite  $(a_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc convergente. En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que  $(a_n)$  tend vers 0.

Puisque

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

on obtient par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{a_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Finalement  $a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$  et la série étudiée est divergente.

**Exercice 53 :** [énoncé]

a) Aisément la suite est strictement positive, décroissante et de limite  $\ell \in [0; \pi/2]$  vérifiant  $\sin \ell = \ell$ .

b)  $u_{n+1} - u_n$  est le terme général d'une série télescopique convergente. Or  $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6} u_n^3$  donc par équivalence de suite de signe constant, on conclut.

c)  $\ln u_{n+1} - \ln u_n$  est le terme général d'une série télescopique divergente. Or  $\ln u_{n+1} - \ln u_n \sim \ln \left(1 - \frac{1}{6} u_n^2\right) \sim -\frac{1}{6} u_n^2$  donc par équivalence de suite de signe constant, on conclut.

**Exercice 54 :** [énoncé]

La suite  $(u_n)$  est à terme strictement positifs car  $u_0 > 0$  et la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  laisse stable l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Puisque pour tout  $x \geq 0$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ , la suite  $(u_n)$  est décroissante.

Puisque décroissante et minorée, la suite  $(u_n)$  converge et sa limite  $\ell$  vérifie  $\ln(1+\ell) = \ell$  ce qui donne  $\ell = 0$ .

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}u_n^2}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{nu_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

On en déduit  $u_n \sim \frac{2}{n}$  et donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

**Exercice 55 :** [énoncé]

- a) La suite  $(a_n)$  est bien définie et à termes positifs puisque pour tout  $x \geq 0$ ,  $1 - e^{-x} \geq 0$ .

Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x \leq 1+x$ , on a  $a_{n+1} \leq a_n$  et la suite  $(a_n)$  est donc décroissante.

Puisque décroissante et minorée,  $(a_n)$  converge et sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = 1 - e^{-\ell}$ . On en déduit  $\ell = 0$ .

Finalement  $(a_n)$  décroît vers 0.

- b) Par le critère spécial des séries alternées,  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

- c) Puisque  $a_n \rightarrow 0$ , on peut écrire  $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)$ .

Par suite  $a_n^2 \sim -2(a_{n+1} - a_n)$ .

Par équivalence de séries à termes positifs, la nature de la série de terme général  $a_n^2$  est celle de la série de terme général  $a_{n+1} - a_n$  qui est celle de la suite de terme général  $a_n$ . Finalement  $\sum a_n^2$  converge.

- d) La nature de la série de terme général  $\ln(a_{n+1}/a_n)$  est celle de la suite de terme général  $\ln(a_n)$ . C'est donc une série divergente. Or

$$\ln \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \ln \left( 1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n) \right) \sim -\frac{1}{2}a_n$$

Par équivalence de série de terme de signe constant, on peut affirmer  $\sum a_n$  diverge.

**Exercice 56 :** [énoncé]

- a)  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  et  $u_n \in ]0; 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $(u_n)$  converge et la seule limite possible est 0.

$$\sum_{n=0}^N u_n^2 = \sum_{n=0}^N u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{N+1} \rightarrow u_0$$

donc  $\sum u_n^2$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = u_0$$

On a

$$\sum_{n=0}^N \ln(1 - u_n) = \ln \left( \prod_{n=0}^N \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \frac{u_{N+1}}{u_0} \rightarrow -\infty$$

donc la série numérique  $\sum \ln(1 - u_n)$  diverge.

- b) Puisque

$$\ln(1 - u_n) \sim -u_n$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant,  $\sum u_n$  diverge.

**Exercice 57 :** [énoncé]

Dans le cas où  $u_0 = 0$ , la suite est nulle.

Dans le cas où  $u_0 = 1$ , la suite est nulle à partir du rang 1

On suppose désormais ces cas exclus.

- a) La suite  $(u_n)$  est à termes dans  $]0; 1[$  car l'application  $x \mapsto x - x^2$  laisse stable cet intervalle.

La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = \ell - \ell^2$  et donc  $\ell = 0$ .

Finalement  $(u_n)$  décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n^3} \rightarrow 1$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \rightarrow 1$$

et donc  $\frac{1}{nu_n} \rightarrow 1$ .

On en déduit que  $u_n \sim \frac{1}{n}$  et donc  $\sum u_n$  diverge.

- b) Comme ci-dessus, on obtient que  $(u_n)$  décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{(u_n u_{n+1})^\alpha} \sim \frac{\alpha u_n^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \rightarrow \alpha$$

Par le théorème de Cesaro,  $\frac{1}{nu_n^\alpha} \rightarrow \alpha$  et donc

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$$

avec  $\lambda > 0$ .

Si  $\alpha \in ]0; 1[$ ,  $\sum u_n$  converge et si  $\alpha \geq 1$ ,  $\sum u_n$  diverge.

### Exercice 58 : [énoncé]

La suite  $(u_n)$  est croissante.

Si  $(u_n)$  converge alors sa limite  $\ell$  est strictement positive et

$$a_n \sim \ell(u_{n+1} - u_n)$$

est le terme général d'une série convergente par équivalence des termes généraux de signe constant.

Si  $\sum a_n$  converge alors

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq a_n/u_0$$

donc par comparaison la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge et donc  $(u_n)$  converge.

### Exercice 59 : [énoncé]

Posons  $v_n = u_n^\beta$ . La suite  $(v_n)$  vérifie  $v_n \in ]0; 1]$  et  $v_{n+1} = \sin(v_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle  $]0; 1]$ , on peut affirmer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \in ]0; 1]$ .

De plus, pour  $x \geq 0$ ,  $\sin x \leq x$  donc la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Puisque décroissante et minorée,  $(v_n)$  converge et sa limite  $\ell$  vérifie  $\sin \ell = \ell$  ce qui donne  $\ell = 0$ .

Finalement  $(v_n)$  décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

On a

$$\frac{1}{v_{n+1}^2} - \frac{1}{v_n^2} = \frac{(v_n - v_{n+1})(v_{n+1} + v_n)}{v_n^2 v_{n+1}^2} \sim \frac{\frac{1}{6} v_n^3 \times 2v_n}{v_n^4} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{v_{k+1}^2} - \frac{1}{v_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

et donc  $\frac{1}{nv_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$ . On en déduit  $v_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$  puis

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/(2\beta)}}$$

avec  $\lambda > 0$ .

Pour  $\beta \in ]0; 1/2[$ ,  $\sum v_n$  converge et pour  $\beta \geq 1/2$ ,  $\sum v_n$  diverge.

### Exercice 60 : [énoncé]

- a) Notons la suite  $(u_n)$  est bien définie, strictement positive et croissante.

Si  $\alpha > 1$ , on a

$$u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{n^\alpha u_1}$$

puis par récurrence

$$u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha u_1}$$

Ainsi  $(u_n)$  converge.

Si  $(u_n)$  converge. Posons  $\ell = \lim u_n$ , on observe  $\ell > 0$ . On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

or la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  est convergente donc  $\alpha > 1$ .

- b) On suppose  $\alpha \leq 1$ . On a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha} u_n^2} \sim \frac{2}{n^\alpha}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes

$$u_n^2 \sim 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

or par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ quand } \alpha < 1$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ quand } \alpha = 1$$

On conclut alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } u_n \sim \sqrt{2 \ln n} \text{ si } \alpha = 1$$

c) On suppose  $\alpha > 1$ . Posons  $v_n = u_n - \ell$ . On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = -v_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

puis

$$v_n = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

### Exercice 61 : [énoncé]

On a

$$\left( \frac{1}{x \ln x} \right)' = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

La fonction  $x \mapsto 1/x \ln x$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

On en déduit

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n \ln n} \geq \int_2^{N+1} \frac{dt}{t \ln t} = \ln \ln(N+1) - \ln \ln 2 \rightarrow +\infty$$

### Exercice 62 : [énoncé]

Par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^n (\ln t)^2 dt \leq \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$$

Or par une intégration par parties on obtient

$$\int_1^n (\ln t)^2 dt \sim n(\ln n)^2$$

donc  $0 \leq u_n \leq v_n$  avec

$$v_n \sim \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

On peut alors conclure que la série des  $u_n$  converge absolument par comparaison avec une série de Bertrand.

### Exercice 63 : [énoncé]

Notons que les termes sommés sont positifs.

La fonction  $x \mapsto a^{\sqrt{x}}$  est décroissante donc

$$a^{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n a^{\sqrt{x}} dx$$

puis

$$\sum_{k=0}^n a^{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_0^n a^{\sqrt{x}} dx = 1 + 2 \int_0^{\sqrt{n}} u a^u du$$

or  $\int_0^{+\infty} u a^u du$  est définie donc

$$\sum_{n \geq 0} a^{\sqrt{n}} < +\infty$$

### Exercice 64 : [énoncé]

Puisque  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est décroissante

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$$

donc

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

d'où l'on obtient :  $u_n \sim 1/n$ .

Il y a donc divergence de la série de terme général  $u_n$ .

### Exercice 65 : [énoncé]

Puisque  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est décroissante

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

donc

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

d'où l'on obtient :

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

puis

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{(\alpha-1)S_\infty n^{\alpha-1}}$$

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{R_n}{S_n}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

### Exercice 66 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$$

donc

$$\sum_{n=1}^p \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_0}^{S_p} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left[ \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_{S_0}^{S_p} \leq \frac{1}{\alpha-1} < +\infty$$

La série à termes positifs est convergente car ses sommes partielles sont majorées.

### Exercice 67 : [\[énoncé\]](#)

Puisque  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est décroissante

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

donc

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

Par suite  $(\alpha-1)\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1+} 1$ .

### Exercice 68 : [\[énoncé\]](#)

a) Par croissance de la fonction  $\sqrt{\cdot}$ .

$$\int_{k-1}^k \sqrt{t} dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt$$

donc

$$\int_0^n \sqrt{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} dt$$

et on conclut aisément.

b) On a

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$$

et, par croissance de la fonction  $\ln \cdot$ ,

$$\int_{k-1}^k \ln t dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t dt$$

donc

$$\int_1^n \ln t dt \leq \ln n! \leq \int_1^{n+1} \ln t dt$$

puis on peut conclure.

c) Par décroissance de la fonction  $x \mapsto 1/x \ln x$  sur  $[1/e; +\infty[$ ,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln t}$$

donc

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t \ln t}$$

puis on conclut via

$$\int \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln t) + C^{te} \rightarrow +\infty$$

### Exercice 69 : [\[énoncé\]](#)

Notons que  $\frac{a}{n^2+a^2} \sim \frac{a}{n^2}$  donc  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$  existe.

La fonction  $x \mapsto \frac{a}{x^2+a^2}$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$  donc par comparaison série-intégrale

$$\int_1^{N+1} \frac{a}{x^2+a^2} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^N \frac{a}{x^2+a^2} dx$$

puis sachant

$$\int \frac{a}{x^2 + a^2} = \arctan \frac{x}{a} + C^{te}$$

on obtient

$$\arctan \frac{N+1}{a} - \arctan \frac{1}{a} \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \arctan \frac{N}{a}$$

Quand  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{a} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}$$

### Exercice 70 : [énoncé]

On a

$$A_n = a + \frac{b(n+1)}{2}, \ln B_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(a + bk)$$

Posons  $f(t) = \ln(a + bt)$  fonction croissante.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale

$$\sum_{k=1}^n f(k) = n \ln(a + bn) - n + o(n)$$

donc

$$\ln \frac{B_n}{A_n} = \ln B_n - \ln A_n = \ln \left( \frac{a + bn}{a + bn/2} \right) - 1 + o(1) \rightarrow \ln 2 - 1$$

puis

$$\frac{B_n}{A_n} \rightarrow \frac{2}{e}$$

### Exercice 71 : [énoncé]

- a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée,  $f$  n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n) dx$$

Or par le théorème des accroissements finis,

$$f(x) - f(n) = f'(c_x)(x - n)$$

avec  $c_x \in ]n; x[$ .

Après calcul de  $f'(x)$ , on en déduit

$$|f(x) - f(n)| \leq \frac{1}{3n^{4/3}} + \frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis  $u_n = O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ .

- b) La série de terme général  $\int_n^{n+1} f(t) dt$  diverge car  $\int_0^n f(t) dt = 3 \sin(n^{1/3})$  diverge. En effet si  $\sin(n^{1/3})$  convergerait vers  $\ell$  alors par extraction  $\sin(n)$  aussi et il est classique d'établir la divergence de  $(\sin(n))$ . On en déduit que  $\sum \frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$  diverge.
- c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même conclusion.  $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n)$

### Exercice 72 : [énoncé]

- a) La fonction  $f'$  est bien définie et continue par morceaux sur  $[1; +\infty[$ .

On a

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}$$

et donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{x^2}$$

La fonction  $x \mapsto 1/x^2$  étant intégrable sur  $[1; +\infty[$ , il en est de même de  $f'$  par domination.

- b) Par intégration par parties

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = [(t - (n-1))f(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n (t - (n-1))f'(t) dt$$

donc

$$|u_n| \leq \int_{n-1}^n (t - (n-1)) |f'(t)| dt \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt$$

L'intégrabilité de  $f'$  permet d'introduire  $\int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$  et d'affirmer que les sommes partielles de la série  $\sum |u_n|$  sont majorées via

$$\sum_{n=1}^N |u_n| \leq |u_1| + \int_1^N |f'(t)| dt \leq |u_1| + \int_1^{+\infty} |f'(t)| dt$$

La série  $\sum u_n$  est alors absolument convergente.

- c) Par l'absurde, supposons que la suite  $(\cos(\ln n))$  converge. La suite extraite  $(\cos(\ln 2^n)) = (\cos(n \ln 2))$  aussi. Notons  $\ell$  sa limite.

Puisque

$$\cos((n+1) \ln 2) + \cos((n-1) \ln 2) = 2 \cos(n \ln 2) \cos(\ln 2)$$

on obtient à la limite  $2\ell = 2\ell \cos(\ln 2)$  et donc  $\ell = 0$ .

Puisque

$$\cos(2n \ln 2) = 2 \cos^2(n \ln 2) - 1$$

on obtient aussi à la limite  $\ell = 2\ell^2 - 1$  ce qui est incompatible avec  $\ell = 0$ .

- d) Puisque

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = -\cos(\ln n) + \cos(\ln(n-1))$$

La divergence de la suite  $(\cos(\ln n))$  entraîne la divergence de la série

$$\sum \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

Enfin, puisque la série  $\sum u_n$  converge, on peut alors affirmer que la série  $\sum f(n)$  diverge.

### Exercice 73 : [énoncé]

- a) Posons

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$$

On a

$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} |f(t) - f(n)| dt$$

Or pour tout  $t \in [n; n+1]$

$$|f(t) - f(n)| = \left| \int_n^t f'(u) du \right| \leq \int_n^t |f'(u)| du \leq \int_n^{n+1} |f'(u)| du$$

et donc

$$|u_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(u)| du$$

Sachant que la suite  $(\int_1^n |f'(u)| du)$  converge, la série  $\sum \int_n^{n+1} |f'(u)| du$  converge et, par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer que la série  $\sum u_n$  est absolument convergente.

Puisque

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt - u_k = \int_1^{n+1} f(t) dt - \sum_{k=1}^n u_k$$

la convergence de la série  $\sum f(n)$  équivaut à celle de la suite  $(\int_1^n f(t) dt)$ .

- b) Introduisons

$$f: t \mapsto \frac{\sin \sqrt{t}}{t}$$

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1; +\infty[$  et

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t}) - \sin(\sqrt{t})}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

est intégrable sur  $[1; +\infty[$ .

La convergence de la série étudiée équivaut alors à la convergence quand  $n \rightarrow +\infty$  de

$$\int_1^n \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$$

En posant  $u = \sqrt{t}$

$$\int_1^n \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt = \int_1^{\sqrt{n}} 2 \frac{\sin u}{u} du$$

dont la convergence quand  $n \rightarrow +\infty$  est bien connue (cf. intégrale de Dirichlet).

### Exercice 74 : [énoncé]

La fonction  $f_n$  est continue, strictement décroissante et de limites  $+\infty$  et 0 en  $n$  et  $+\infty$ . On en déduit que  $f_n$  réalise une bijection de  $]n; +\infty[$  vers  $]0; +\infty[$ . Ainsi, pour tout  $a > 0$ , il existe un unique  $x_n > n$  vérifiant  $f_n(x_n) = a$ .

On a

$$f_n(n+1+y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+y-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+y} \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t+y} = \int_0^n \frac{dt}{t+y} = \ln\left(1 + \frac{n}{y}\right)$$

Pour  $y = \frac{n}{e^a - 1}$ ,

$$f(n+1+y) \leq \ln(1 + (e^a - 1)) = a$$

et par suite

$$x_n \leq n+1 + \frac{n}{e^a - 1}$$

Aussi

$$f(n+y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y+k} \geq \int_0^n \frac{dt}{t+y} = \ln\left(1 + \frac{n}{y}\right)$$

Pour  $y = \frac{n}{e^a - 1}$ ,  $f(n+y) \geq a$  et par suite

$$x_n \geq n + \frac{n}{e^a - 1}$$

On en déduit

$$x_n \sim n + \frac{n}{e^a - 1} = \frac{e^a n}{e^a - 1}$$

### Exercice 75 : [énoncé]

On remarque

$$n \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec  $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{1/x}$ .

La fonction  $\varphi$  est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t) dt$$

En sommant et en exploitant l'intégrabilité de  $\varphi$  au voisinage de  $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t} dt$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} dt = \left[ -e^{1/t} \right]_1^{+\infty} = e - 1 \text{ et } \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}} dt = \left[ -e^{1/t} \right]_{(n-1)/n}^{+\infty} \rightarrow e - 1$$

Par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \frac{1}{k^2} e^{\frac{n}{k}} \right) = e - 1.$$

### Exercice 76 : [énoncé]

La fonction  $t \mapsto f(e^{-t})$  est décroissante et positive donc, par théorème de comparaison série intégrale, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(e^{-t}) dt$  et la série  $\sum f(e^{-n})$  ont même nature.

Par le changement de variable  $\mathcal{C}^1$  bijectif  $u = e^t$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(e^{-t}) dt$  à même nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) du$ .

La fonction  $u \mapsto \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)$  est décroissante et positive donc, par théorème de comparaison série intégrale, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) du$  et la série  $\sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$  ont même nature.

### Exercice 77 : [énoncé]

La convergence de  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  s'obtient entre autre par le critère d'Alembert puisque

$$\left| \frac{1/(k+1)!}{1/k!} \right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

On peut alors majorer le reste de la série en prenant appui sur une somme géométrique

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - 1/(n+1)} = \frac{1}{n.n!}$$

Notons que raisonner par récurrence ne marche pas.

### Exercice 78 : [énoncé]

Selon que  $\alpha < 0$  ou  $\alpha \geq 0$ , on encadre  $1/k^\alpha$  en exploitant la monotonie de  $x \mapsto 1/x^\alpha$ .

Sachant que

$$\int \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} + C^{te} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

### Exercice 79 : [énoncé]

Puisque la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est décroissante

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

donc

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

d'où l'on obtient

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

### Exercice 80 : [énoncé]

a)  $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$  et  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$  est une série à terme positif divergente donc

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$

b) Pour être plus précis,

$$S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}}$$

or

$$\frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$$

et est donc le terme général d'une série convergente.

Ainsi,  $S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} oC'$  d'où

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + (\gamma + C') + o(1) = \ln n + C + o(1)$$

### Exercice 81 : [énoncé]

a)  $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$  donc la série de terme général  $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$  est absolument convergente. Par suite  $(S_n)$  converge vers une certaine constante  $C$ .

b)

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  est une série à termes positifs convergente.

Par comparaison série intégrale  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  et on peut conclure comme annoncée.

### Exercice 82 : [énoncé]

Par une comparaison avec une intégrale, on sait déjà

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$$

Il reste à déterminer un équivalent simple de la différence

$$d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n}$$

Sachant que  $\frac{1}{n}$  est le reste de rang  $n$  de la série convergente

$$\sum \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum \frac{1}{k(k-1)}$$

$$d_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2(k-1)}$$

Par équivalence de reste de séries à termes positifs convergentes

$$d_n \sim - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Par comparaison avec une intégrale

$$d_n \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Finalement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

### Exercice 83 : [énoncé]

a) Pour  $\alpha > 1$ , la série de terme général  $1/n^\alpha$  converge et si l'on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

on observe

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^\alpha} = S_{2n} - S_n \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$$

Pour  $\alpha = 1$ , on introduit les sommes partielles harmoniques

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

En notant  $\gamma$  la constante d'Euler, on peut écrire

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

et alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = H_{2n} - H_n = \ln 2 + o(1) \rightarrow \ln 2$$

b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\sin x = x + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \sin^{(3)}(t) dt$$

Puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin^{(3)}(t) = -\cos(t) \in [-1; 1]$$

on a

$$\forall x \geq 0, \sin x \geq x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} dt = x - \frac{1}{6}x^3$$

D'autre part, il est bien connu que

$$\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$$

On en déduit

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

En vertu de ce qui précède, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \ln 2$$

**Exercice 84 :** [\[énoncé\]](#)

a) On a

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right)$$

Or

$$\ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right) = -\frac{1}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

donc

$$\ln u_n = -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{1}{3} \ln n + C + o(1)$$

car  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$  et  $\sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  est une série convergente.

b) Puisque

$$\ln(n^{1/3} u_n) \rightarrow \beta$$

on a

$$u_n \sim \frac{e^\beta}{n^{1/3}}$$

et donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

**Exercice 85 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$P_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n} > 0$$

On a

$$\ln(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(3k-1) - \ln n$$

Par comparaison série-intégrale

$$\ln 2 + \int_1^n \ln(3t-1) dt \leq \sum_{k=1}^n \ln(3k-1) \leq \int_1^{n+1} \ln(3t-1) dt$$

Or

$$\int_1^n \ln(3t-1) dt = \frac{3n-1}{3} \ln(3n-1) - n + C = n \ln n + (\ln 3 - 1)n + O(\ln n)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \ln(3k-1) = n \ln n + (\ln 3 - 1)n + O(\ln n)$$

On en déduit

$$\ln P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 3 - 1$$

puis

$$P_n \rightarrow \frac{3}{e}$$

### Exercice 86 : [énoncé]

a) Avec convergence des sommes engagées

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k(nk+1)} - \frac{1}{nk^2} \right) = \frac{\pi^2}{6n} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk^2(nk+1)}$$

et

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk^2(nk+1)} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)} \sim \frac{\pi^2}{6n}$$

b) Par décomposition en éléments simples et télescopage

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \frac{\ln n}{n}$$

### Exercice 87 : [énoncé]

$n_p$  est bien défini car  $H_n \rightarrow +\infty$ .

La suite  $(n_p)$  est croissante et évidemment non majorée donc

$$n_p \rightarrow +\infty$$

Par définition de  $n_p$ , on a

$$H_{n_p} \geq p \geq H_{n_p-1}$$

Or

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

donc

$$\ln n_p + \gamma + o(1) \geq p \geq \ln(n_p - 1) + \gamma + o(1)$$

Puisque

$$\ln(n_p - 1) = \ln n_p + o(1)$$

on obtient

$$p = \ln n_p + \gamma + o(1)$$

puis

$$n_p = e^{n-\gamma+o(1)} \sim e^{n-\gamma}$$

### Exercice 88 : [énoncé]

a) Puisque

$$\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{ p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \geq j \right\}$$

est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ . Celle admet donc un plus petit élément, noté  $\Phi_j$ .

b) Par définition de  $\Phi_j$ , on a

$$j \leq \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^{\Phi_j} \frac{dt}{t} = 1 + \ln \Phi_j$$

On en déduit  $\Phi_j \geq e^{j-1}$  puis  $\Phi_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty$ .

c) Par définition de  $\Phi_j$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1} \frac{1}{n} \leq j \leq \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, sachant que  $\Phi_j \rightarrow +\infty$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j-1} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1)$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leq j \leq \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + o(1)$$

donc

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = e^{j-\gamma+o(1)}$$

On en déduit

$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} = \frac{e^{j+1-\gamma+o(1)}}{e^{j-\gamma+o(1)}} = e^{1+o(1)} \rightarrow e$$

### Exercice 89 : [énoncé]

Posons  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . On observe que

$$\sum_{k=1}^n k u_n = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k$$

Par suite

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \quad (*)$$

Puisque  $\frac{S_n}{n u_n} \rightarrow a$ , on a  $S_n \sim a n u_n$ .

La série de terme général  $S_n$  est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=1}^n S_k \sim a \sum_{k=1}^n k u_k$$

Par suite

$$\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \sim a w_n$$

La relation (\*) dévient alors

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - a w_n + o(w_n)$$

et on en déduit que

$$w_n \sim \frac{1}{a+1} v_n \rightarrow \frac{a}{a+1}$$

### Exercice 90 : [énoncé]

a) On a

$$\frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}$$

Il y a donc convergence absolue de la série  $\sum \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right)$ .

b) On a

$$1 + \sum_{k=2}^n \left[ \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right] = H_n + \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = H_n - \ln n$$

donc

$$H_n = \ln n + \gamma - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right]$$

ce qui détermine

$$\varepsilon_n = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right]$$

c)  $\sum 1/k^2$  est une série à termes positifs convergente. Par sommation de relation de comparaison

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} - \left[ \frac{1}{k} + \ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

Enfin, à l'aide d'une comparaison avec une intégrale

$$\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n}$$

### Exercice 91 : [énoncé]

Si  $\alpha < 1$  alors  $n^{\frac{1}{n^\alpha \ln n}} \rightarrow +\infty$  donc pour  $n$  assez grand  $\frac{1}{n^\alpha \ln n} \geq \frac{1}{n}$ . Par comparaison de séries à termes positifs, la série diverge

Si  $\alpha > 1$  alors considérons  $\beta \in ]1; \alpha[$ . On a  $n^\beta \frac{1}{n^\alpha \ln n} \rightarrow 0$  donc la série est absolument convergente.

Si  $\alpha = 1$  alors exploitons la décroissance de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  sur  $]1; +\infty[$ .

Pour  $k \geq 2$ ,

$$\frac{1}{k \ln k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t}$$

donc

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Par suite, la série étudiée diverge.

### Exercice 92 : [énoncé]

Si  $\alpha \leq 0$  alors à partir d'un certain rang  $u_n \geq 1/n$  et la série diverge.

Si  $\alpha > 0$  alors la fonction  $x \mapsto 1/x(\ln x)^\alpha$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$ .

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} \leq u_n \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$$

donc

$$\int_3^{N+1} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha} \leq \sum_{n=3}^N u_n \leq \int_2^N \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$$

puis

$$\int_{\ln 3}^{\ln N+1} \frac{du}{u^\alpha} \leq \sum_{n=3}^N u_n \leq \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{du}{u^\alpha}$$

et on peut conclure qu'il y a convergence si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

### Exercice 93 : [énoncé]

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  étant croissante,

$$\int_0^n \sqrt{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x} dx$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$$

Il y a donc convergence de la série de terme général  $u_n$  si, et seulement si,  $\alpha > 5/2$ .

Par l'encadrement qui précède :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \int_0^n \sqrt{x} dx \leq \int_n^{n+1} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n^{3/2} + O(\sqrt{n})$$

puis

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n 2}{3n^{\alpha-3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\right)$$

Pour  $\alpha > 5/2$  : il y a absolue convergence comme ci-dessus.

Pour  $3/2 < \alpha \leq 5/2$  : il y a convergence par somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

Pour  $\alpha \leq 3/2$  : il y a divergence grossière.

### Exercice 94 : [énoncé]

Par comparaison série intégrale :

Si  $\alpha > 0$ ,  $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$  est terme général d'une série absolument convergente.

Si  $-1 < \alpha < 0$ ,  $u_n \sim \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$  n'est pas le terme général d'une série convergente.

Si  $\alpha = -1$ ,  $u_n \sim \frac{1}{\ln n}$  n'est pas le terme général d'une série convergente.

Si  $\alpha < -1$ ,  $u_n \not\rightarrow 0$  et donc  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.

### Exercice 95 : [énoncé]

Par comparaison série intégral,

$$\sum_{k=2}^n \ln^2 k \sim n(\ln n)^2$$

donc

$$u_n = \frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^n \ln^2 k} \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}(\ln n)^2}$$

Par référence aux séries de Bertrand,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha \leq 0$ .

### Exercice 96 : [énoncé]

a) Si  $\alpha \leq 0$ , il y a divergence grossière. Si  $\alpha > 0$  alors  $n^2 u_n \rightarrow 0$  et la série est absolument convergente.

b) Si  $\alpha \leq 1$  alors  $u_n \geq 1/n$  pour  $n$  assez grand et il y a divergence par comparaison de séries à termes positifs.

Si  $\alpha > 1$  alors pour  $\gamma \in ]1; \alpha[$  on a  $n^\gamma u_n \rightarrow 0$  et il y a absolue convergence.

c) Si  $\alpha \leq 1$  alors  $u_n \geq 1$  et la série est grossièrement divergente.

Si  $\alpha > 1$  alors  $n^2 u_n = \exp(2 \ln n - (\ln n)^\alpha) \rightarrow 0$  donc la série est absolument convergente.

**Exercice 97 :** [énoncé]

On a

$$\ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = (1+a+b) \ln n + \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il y a convergence si, et seulement si,  $1+a+b=0$  et  $a+2b=0$  ce qui correspond à  $a=-2$  et  $b=1$ .

Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^N \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = \sum_{n=1}^N \ln n - 2 \sum_{n=2}^{N+1} \ln n + \sum_{n=3}^{N+2} \ln n$$

puis

$$\sum_{n=1}^N \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = \ln 1 + \ln 2 - 2 \ln 2 - 2 \ln(N+1) + \ln(N+1) + \ln(N+2) \rightarrow -\ln 2$$

**Exercice 98 :** [énoncé]

On a

$$\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Il y a convergence si, et seulement si,  $1+a+b=0$  et  $a+2b=0$  ce qui correspond à  $a=-2$  et  $b=1$ .

Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \sum_{n=1}^N \sqrt{n} - 2 \sum_{n=2}^{N+1} \sqrt{n} + \sum_{n=3}^{N+2} \sqrt{n}$$

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \sqrt{1} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{N+1} + \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2}$$

et enfin

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} \rightarrow 1 - \sqrt{2}$$

**Exercice 99 :** [énoncé]Posons  $u_n$  le terme général de la suite étudiée.

$$u_{3n+3} = \sum_{k=1}^n \frac{a}{\sqrt{3k+1}} + \frac{b}{\sqrt{3k+2}} + \frac{c}{\sqrt{3k+3}}$$

Or

$$\frac{a}{\sqrt{3k+1}} + \frac{b}{\sqrt{3k+2}} + \frac{c}{\sqrt{3k+3}} = \frac{a+b+c}{\sqrt{3k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

donc  $a+b+c=0$  est une condition nécessaire pour la convergence de  $(u_{3n+3})$  et donc *a fortiori* pour la convergence de  $(u_n)$ . Inversement si cette condition est satisfaite alors

$$\frac{a}{\sqrt{3k+1}} + \frac{b}{\sqrt{3k+2}} + \frac{c}{\sqrt{3k+3}} = O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

et donc  $(u_{3n+3})$  converge.

De plus  $u_{3n+1} = u_{3n+3} + o(1)$  et  $u_{3n+2} = u_{3n+3} + o(1)$  donc les trois suites  $(u_{3n+1})$ ,  $(u_{3n+2})$  et  $(u_{3n+3})$  convergent vers une même limite, on peut donc conclure que  $(u_n)$  converge.

**Exercice 100 :** [énoncé]Si  $|\lambda| = 1$  il y a divergence grossière dans les trois cas.

Si  $|\lambda| > 1$  alors  $u_n \sim \frac{1}{\lambda^n}$ ,  $v_n \sim 1$  et  $w_n \sim \frac{1}{\lambda^{2n}}$ . Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum w_n$  convergent et  $\sum v_n$  diverge.

Si  $|\lambda| < 1$  alors  $u_n \sim \lambda^n$ ,  $v_n \sim \lambda^{2n}$  et  $w_n \sim 1$ . Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent tandis que  $\sum w_n$  diverge.

**Exercice 101 :** [énoncé]

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

La série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est convergente et la série de terme général

$$\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$$

est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .Finalement la série initiale converge si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .

**Exercice 102 :** [énoncé]

On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

Si  $\alpha \leq 0$  alors  $u_n \not\rightarrow 0$  donc  $\sum_{n \geq 2} u_n$  diverge. Si  $\alpha > 0$  alors  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge.  
Si  $\frac{3\alpha}{2} > 1$  alors

$$-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente et donc  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge.

Si  $\frac{3\alpha}{2} \leq 1$  alors

$$-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right) \sim \frac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$$

(de signe constant) est le terme général d'une série divergente donc  $\sum_{n \geq 2} u_n$ .

**Exercice 103 :** [énoncé]

Par développement

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

avec

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

$\sum v_n$  converge en vertu du critère spécial des séries alternées et  $\sum w_n$  converge si, et seulement si,  $2\alpha > 1$  par équivalence de termes généraux de séries de signe constant. Au final,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1/2$ .

**Exercice 104 :** [énoncé]

On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$$

Par le critère spécial,  $\frac{(-1)^n}{n^a}$  est terme général d'une série convergente.  
Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si,  $a > 1/2$ .  
Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si,  $a > 1/2$ .

**Exercice 105 :** [énoncé]

On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Par suite, la série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $a = -1$ .

**Exercice 106 :** [énoncé]

a) Par convergence dominée par la fonction  $\varphi: t \mapsto 1$ , on obtient  $u_n \rightarrow 0$ .

b)

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)' (\tan t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

c) On vérifie aisément  $u_n \rightarrow 0^+$  et  $u_{n+1} \leq u_n$ . Par application du critère spécial des séries alternées,  $\sum (-1)^n u_n$  converge.

d) Par monotonie

$$u_n + u_{n+2} \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-2}$$

On en déduit  $u_n \sim \frac{1}{2n}$  puis par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 0$ .

**Exercice 107 :** [énoncé]

Pour  $t \in [0; 1/n]$ , on peut affirmer  $t^n \in [0; 1/n]$  donc

$$\left| \int_0^{1/n} f(t^n) dt - \frac{1}{n} f(0) \right| \leq \frac{1}{n} \sup_{t \in [0; 1/n]} |f(t) - f(0)|$$

Par continuité de  $f$  en 0, on peut affirmer,

$$\sup_{t \in [0; 1/n]} |f(t) - f(0)| \rightarrow 0$$

et donc

$$\int_0^{1/n} f(t^n) dt \sim \frac{1}{n} f(0)$$

Ainsi

$$u_n \sim \frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$$

et  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 0$ .

**Exercice 108 :** [énoncé]

On a

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)\right)$$

Si  $\alpha \geq 1$  alors  $(u_n)$  ne tend pas vers zéro et  $\sum u_n$  est grossièrement divergente.Si  $\alpha \in ]0; 1[$  alors  $n^2 u_n \rightarrow 0$  et  $\sum u_n$  est convergente.**Exercice 109 :** [énoncé]a) Si  $\alpha \leq 1$  alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

et donc  $u_n \rightarrow 0$  si  $a \in [0; 1[$ ,  $u_n \rightarrow 1$  si  $a = 1$  et  $(u_n)$  diverge si  $a > 1$ .Si  $\alpha > 1$  alors  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})$  converge et donc  $(u_n)$  aussi.b) Cas  $\alpha \leq 1$  et  $a = 1$  :  $u_n = 1$ ,  $v_n = 0$  et on peut conclure.Cas  $\alpha < 1$  et  $a \in [0; 1[$  :  $\ell = 0$ ,  $v_n = u_n$ ,  $n^2 v_n = e^{2 \ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \ln a} \rightarrow 0$  car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Cas  $\alpha = 1$  et  $a \in [0; 1[$  :  $\ell = 0$ ,  $v_n = u_n = e^{(\ln n + \gamma + o(1)) \ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$  donc $\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\ln a < -1$  i.e.  $a < -1/e$ .Cas  $\alpha > 1$  :  $\ell = a \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ,

$$v_n = \ell(e^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi  $\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que  $\sum (-1)^n v_n$  converge.**Exercice 110 :** [énoncé]

On a

$$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{p!} \sim \frac{1}{p!} n^p$$

donc

$$v_n \sim \frac{(p!)^\alpha}{n^{p\alpha}}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série numérique  $\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1/p$ .

On a

$$\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p}{p+1} + \binom{n+p}{p} \geq \binom{n+p}{p}$$

donc la suite  $(|w_n|)$  est décroissante. De plus elle de limite nulle, le critère spécial des séries alternées assure alors la convergence de  $\sum w_n$  pour tout  $\alpha > 0$ .**Exercice 111 :** [énoncé]a) L'intégrale étudiée est bien définie pour  $a > -1$ . Par le changement de variable proposé

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a \sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(1+a)x^2}$$

puis en posant  $u = x\sqrt{1+a}$ 

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$$

b) Par symétrie

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

et par le calcul qui précède

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

c) Par monotonie, on a l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série actuellement étudiée entraîne la convergence de la précédente et inversement. La condition attendue est donc encore  $\alpha > 2$ .

- d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^n \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$$

La fonction intégrée étant positive, la convergence de l'intégrale entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

### Exercice 112 : [énoncé]

- a) Pour définir  $u_n$ , il est nécessaire de supposer  $\alpha > 1$ .  
Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 2$ .

- b) Pour définir  $u_n$ , il est nécessaire de supposer  $\alpha > 0$ .  
Par application du critère spécial des séries alternées,  $v_n$  étant le reste de la série  $\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$  est du signe de  $(-1)^n$  et  $|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \rightarrow 0$ .  
De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left( \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} \right)$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+2)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec  $c_n \in ]p+n+1; p+n+2[$ .

La suite  $(c_n)$  est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum (-1)^p \left( \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha} \right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final,  $(|v_n|)$  est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que  $\sum v_n$  converge.

### Exercice 113 : [énoncé]

Introduisons la somme partielle

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{x^{a_n}}{n^3}$$

On remarque que pour  $n \in \{10^{p-1}, \dots, 10^p - 1\}$  on a  $a_n = p$ .  
En regroupant pertinemment les termes sommés

$$S_{10^q-1} = \sum_{p=1}^q \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{x^{a_n}}{n^3} = \sum_{p=1}^q \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{x^p}{n^3} = \sum_{p=1}^q u_p x^p$$

Puisque la fonction  $t \mapsto 1/t^3$  est décroissante, on a la comparaison

$$\int_{10^{p-1}}^{10^p} \frac{dt}{t^3} \leq u_p = \sum_{n=10^{p-1}}^{10^p-1} \frac{1}{n^3} \leq \int_{10^{p-1}-1}^{10^p-1} \frac{dt}{t^3}$$

Après calculs, on obtient

$$u_p \sim \frac{99}{2} \frac{1}{100^p}$$

Cas  $x \geq 0$

La série  $\sum u_p x^p$  converge si, et seulement si,  $x < 100$ .

Puisque la série  $\sum x^{a_n}/n^3$  est à termes positifs, sa convergence équivaut à la convergence d'une suite extraite de sommes partielles et donc  $\sum x^{a_n}/n^3$  converge si, et seulement si,  $x < 100$ .

Cas  $x < 0$ .

Pour  $x \in ]-100; 0[$ , il y a absolue convergence de la série en vertu de l'étude qui précède.

Pour  $x \leq -100$ , on peut écrire  $x = -y$  avec  $y \geq 100$ , on a alors

$$S_{10^q-1} = \sum_{p=1}^q (-1)^q u_q y^q$$

avec  $(u_q y^q)$  qui ne tend pas vers zéro.

Il y a alors divergence d'une suite extraite de sommes partielles et donc divergence de la série  $\sum x^{a_n}/n^3$ .

### Exercice 114 : [énoncé]

Avec convergences, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

**Exercice 115 :** [\[énoncé\]](#)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

**Exercice 116 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^4}$$

donc la série converge.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - 1 + 2 \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{3} - 3$$

**Exercice 117 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\sum_{n=2}^{2N+1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{k=1}^N \ln(2k+1) - \ln(2k+1) = 0$$

et

$$\sum_{n=2}^{2N} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=2}^{2N+1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) + o(1) \rightarrow 0$$

donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0$$

**Exercice 118 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\sum_{n=2}^N \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=2}^N (\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2 \ln n)$$

donc

$$\sum_{n=2}^N \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=2}^N (\ln(n-1) - \ln n) + \sum_{n=2}^N (\ln(n+1) - \ln n)$$

Après télescopage

$$\sum_{n=2}^N \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = \ln \frac{N+1}{N} - \ln 2 \rightarrow -\ln 2$$

On en déduit que la série converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\ln 2$$

**Exercice 119 :** [\[énoncé\]](#)

La somme existe en vertu du critère de Leibniz.

Pour la calculer, il suffit de déterminer la limite des sommes partielles de rangs pairs.

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1 + 1/n) = \sum_{n=1}^N \ln(2n+1) - \ln(2n) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(2n+1) - \ln(2n+2)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1 + 1/n) = 2 \sum_{n=1}^N \ln \frac{2n+1}{2n} - \ln(2N+1)$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1 + 1/n) = \ln \left( \frac{(2N)!(2N+1)!}{2^{4N}(N!)^4} \right)$$

Or  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(1 + 1/n) \rightarrow \ln(2/\pi)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(1 + 1/n) = \ln(2/\pi)$$

### Exercice 120 : [\[énoncé\]](#)

D'une part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$

D'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) + n - 2}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

### Exercice 121 : [\[énoncé\]](#)

Le terme

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

est bien défini en tant que reste d'une série alternée satisfaisant au critère spécial.

Pour  $N \leq K$  entiers,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^K \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^K \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2}$$

D'une part

$$\sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$$

D'autre part

$$\sum_{k=N+1}^K \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^k}{k^2} = N \sum_{k=N+1}^K \frac{(-1)^k}{k^2}$$

En passant à la limite quand  $K \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k} + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand  $N \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{n=1}^N u_n \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Ainsi  $\sum u_n$  est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$$

### Exercice 122 : [\[énoncé\]](#)

La convergence de la série est assurée par le critère de d'Alembert. On a

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(1-x^n)} - \frac{1}{(1-x^{n+1})} \right)$$

Après télescopage on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

### Exercice 123 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$m \times \frac{1}{n(n+1) \dots (n+m)} = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+m-1)} - \frac{1}{(n+1) \dots (n+m)}$$

Après télescopage

$$m \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1) \dots (n+m)} = \frac{1}{m!} - \frac{1}{(N+1) \dots (N+m)}$$

donc, sachant  $m \geq 1$ ,

$$m \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1) \dots (n+m)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{m.m!} = S_m$$

### Exercice 124 : [énoncé]

Considérons

$$v_n = \arctan \frac{1}{n+1} - \arctan \frac{1}{n+2} \in ]0; \pi/2[$$

On constate

$$\tan v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

et donc  $u_n = v_n$ .

En tant que somme télescopique associée à une suite convergente, la série  $\sum u_n$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

### Exercice 125 : [énoncé]

a)  $a_p$  existe en vertu de la règle de d'Alembert.

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left( a_p + \binom{p}{1} a_{p-1} + \dots + \binom{p}{p} a_0 \right)$$

donc

$$a_p = \binom{p}{1} a_{p-1} + \dots + \binom{p}{p} a_0$$

b) Par un récurrence aisée  $a_p \in \mathbb{N}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 126 : [énoncé]

On peut supposer  $\alpha > 0$  quitte à passer la suite à l'opposé.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{b-a}{n-b}$$

Posons  $v_n = n^{a-b} u_n$ .  $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(1/n^2)$  donc  $(\ln v_n)$  converge puis

$$u_n \sim \frac{A}{n^{a-b}} \text{ avec } A > 0$$

Par conséquent  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $a-b > 1$ .

$(n-b)u_{n+1} = (n-a)u_n$  donc

$$(n+1)u_{n+1} - nu_n = (b+1)u_{n+1} - au_n$$

En sommant et en notant  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , on obtient  $(b+1)(S-\alpha) - aS = 0$  donc

$$S = \frac{(b+1)\alpha}{b+1-a}$$

### Exercice 127 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sin(\pi x) dx$$

Posons

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} dx$$

Cette intégrale est bien définie car la fonction intégrée se prolonge par continuité en 1.

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k - I \right| \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} x^{n+1} dx \leq \frac{M}{n+1}$$

avec

$$M = \sup_{[0;1]} \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$$

On conclut que  $\sum_{k=0}^n u_k \rightarrow I$  puis par changement de variable

$$\sum_{k=0}^n u_k \rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

**Exercice 128 :** [\[énoncé\]](#)

La convergence s'obtient par équivalence de séries à termes positifs, la somme via une décomposition en éléments simples permettant de calculer les sommes partielles. On obtient

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

Si  $k + 1$  n'est pas le carré d'un entier

$$\frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k} = 0$$

Si  $k + 1$  est le carré d'un entier  $n$ ,

$$\frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k} = \frac{1}{n^2 - 1}$$

Cela permet de calculer les sommes partielles et de conclure en faisant le lien avec la série précédente.

**Exercice 129 :** [\[énoncé\]](#)

Pour  $t = -1$ ,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$

ce qui permet de conclure.

Pour  $t \neq -1$ ,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i t^{i+1} \frac{1 - (-t)^{m+1}}{1+t}$$

Quand  $m \rightarrow +\infty$ ,

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \rightarrow \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$

si  $|t| < 1$  et diverge sinon.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t \frac{1 - (-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \rightarrow \frac{t}{(1+t)^2}$$

**Exercice 130 :** [\[énoncé\]](#)

Par décomposition en éléments simples

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n-1)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{2}{m} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$$

Or

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln(2N) + \gamma + o(1) - \ln N - \gamma = \ln 2 + o(1)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \ln 2$$

**Exercice 131 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$  existe.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

donc en exploitant

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{5k+6}{k(k+1)(k+2)} = 3 \ln \frac{n^3}{(n+1)(n+2)^2} + 4 + o(1) \rightarrow 4$$

**Exercice 132 :** [\[énoncé\]](#)

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

Sachant

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^N \frac{3}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n}$$

Or on sait que

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

donc on conclut que la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln 2$$

### Exercice 133 : [énoncé]

a) On a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \ln 2n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma = \ln 2 + o(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + o(1)$$

donc la série converge et est de somme égale à  $\ln 2$ .

b) On a

$$\sum_{k=1}^{3n} u_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} = \ln 3n + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma = \ln 3 + o(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{3n+1} u_n = \sum_{k=1}^{3n} u_n + o(1) \rightarrow \ln 3 \text{ et } \sum_{k=1}^{3n+2} u_n = \sum_{k=1}^{3n} u_n + o(1) \rightarrow \ln 3$$

donc la série converge et est de somme égale à  $\ln 3$ .

### Exercice 134 : [énoncé]

On a

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et donc

$$\frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} \sim \frac{3}{n^3}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique  $\sum \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$  converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$$

En introduisant la constante d'Euler  $\gamma$ , on sait

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln(N+1) + \gamma - 1 + o(1)$$

et en introduisant dans la somme les inverses des nombres pairs absents, on obtient

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} = \ln(2N+1) - \frac{1}{2} \ln N + \frac{1}{2} \gamma - 1 + o(1)$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \ln \frac{N^{18}(N+1)^6}{(2N+1)^{24}} + 18 + o(1)$$

puis à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = 18 - 24 \ln 2$$

**Exercice 135 :** [\[énoncé\]](#)

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4n} - \frac{3}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série étudiée est absolument convergente.

On a

$$\sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = \sum_{k=1}^{4N+4} \frac{1}{k} - 4 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2}$$

Or

$$4 \sum_{n=0}^N \frac{1}{4n+2} = 2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} = 2 \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{2k}$$

Par le développement

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on parvient à

$$\sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = \ln(4N+4) + \gamma - 2 \ln(2N+1) - 2\gamma + \ln N + \gamma + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} \right) = 0$$

(ce qui change du  $\ln 2$  traditionnel... ;-)

**Exercice 136 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $f$  est décroissante sur  $[e; +\infty[$ . Pour  $p \geq 4$ ,

$$\int_p^{p+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln p}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{\ln t}{t} dt$$

donc  $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + v_n$  avec

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq v_n \leq \int_3^n \frac{\ln t}{t} dt$$

donc  $v_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$ .

Étudions  $w_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ ,  $w_n - w_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt \leq 0$  donc  $(w_n)$  est décroissante.

D'autre part les calculs précédents donnent  $(w_n)$  minorée et donc on peut conclure que  $w_n$  converge. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C + o(1)$$

b)

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{\ln(2n)}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + u_N - u_{2N}$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \ln 2 \cdot \ln n + \ln(2)\gamma + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C - \frac{1}{2}(\ln 2n)^2 - C + o(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

N'est-ce pas magnifique ?

**Exercice 137 :** [\[énoncé\]](#)

a)  $\sum_{n \geq 1} f(n)$  diverge et  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f(n)$  converge en application du critère spécial.

b) Pour  $n \geq 4$ ,

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(n-1)$$

donc

$$0 \leq \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

avec

$$\sum_{n=4}^{+\infty} f(n-1) - f(n) = f(3)$$

donc la série de terme général  $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  converge et il en est de même de la série de terme général  $f(n) - \int_{n-1}^n f(t) dt$ .

c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k)$$

avec

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = 2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$$

Or

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) - \int_{k-1}^k f(t) dt + \int_1^n f(t) dt = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C$$

et en exploitant  $\ln(2k) = \ln 2 + \ln k$

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \ln n + \ln(2)\gamma + o(1) + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C$$

On en déduit

$$2 \sum_{k=1}^n f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k) = \ln(2)\gamma - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1)$$

Au final

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2} \ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

### Exercice 138 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \varepsilon_n$$

avec

$$|\varepsilon_n| \leq \int_0^1 x^{n+\alpha} dx = \frac{1}{n+\alpha-1} \rightarrow 0$$

d'où la conclusion.

### Exercice 139 : [énoncé]

Tout d'abord la série converge en vertu de la règle de d'Alembert (en traitant  $x = 0$  séparément)

Puisque

$$\sum_{k=0}^n kx^k = x \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) = x \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)' \rightarrow \frac{x}{(1-x)^2}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

### Exercice 140 : [énoncé]

Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^N \int_0^1 (-t^4)^n dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^4)^{N+1}}{1+t^4} dt$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4} dt \right| \leq \int_0^1 t^{4N+4} dt = \frac{1}{4N+5} \rightarrow 0$$

donc  $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$  converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right)$$

**Exercice 141 :** [\[énoncé\]](#)

Introduisons la série entière de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}$$

On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur  $[-1; 1]$  par convergence normale.

Sur  $] -1; 1[$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{4n+1}$$

Pour  $x \neq 0$

$$\left[ \frac{1}{x} S'(x) \right]' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

On en déduit que sur  $] -1; 1[$

$$S'(x) = x \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$$

puis

$$S(x) = \int_0^x t \int_0^t \frac{du}{1-u^4}$$

Par intégration par parties

$$S(x) = \left[ \frac{1}{2}(t^2-1) \int_0^t \frac{du}{1-u^4} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1-t^2}{1-t^4} dt$$

et ainsi

$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Quand  $x \rightarrow 1^-$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^4} = O(\ln(1-x)) = o\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

donc

$$S(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = S(1) = \frac{\pi}{8}$$

**Exercice 142 :** [\[énoncé\]](#)

Posons

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

On observe

$$u_n = 2H_n - H_{n^2} = 2(\ln n + \gamma + o(1)) - \ln(n^2) - \gamma + o(1) \rightarrow \gamma$$

**Exercice 143 :** [\[énoncé\]](#)

a) On sait

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

donc

$$a_n = H_{3n} - H_n \rightarrow \ln(3) = \lambda$$

b) Si on sait

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

les choses vont assez vite... mais sans doute l'examinateur souhaitera la démonstration de ce résultat.

$$a_n = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=n+1}^{3n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

avec

$$\sum_{k=n+1}^{3n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln 3$$

donc

$$a_n - \lambda = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Or  $\sum \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$  est absolument convergente car

$$\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2}$$

donc  $a_n - \lambda = R_n - R_{3n}$  avec

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Or par sommation d'équivalent sur des restes de séries convergentes à termes de signe constant,

$$R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$$

(le dernier équivalent s'obtenant, soit par comparaison série intégrale, soit par  $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k-1)}$  et sommation télescopique).

Au final

$$a_n - \lambda = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{3n}$$

#### Exercice 144 : [énoncé]

a) On a

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

La série  $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n$  tend vers  $-\infty$  donc  $\ln u_n \rightarrow -\infty$  puis  $u_n \rightarrow 0$ .

b) Posons  $v_n = \sqrt{n}u_n$ .

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln u_{n+1} - \ln u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série  $\sum \ln v_{n+1} - \ln v_n$  converge et donc la suite  $\ln v_n$  aussi.

En posant  $\ell$  sa limite, on obtient  $\sqrt{n}u_n \rightarrow C$  avec  $C = e^\ell > 0$ .

Notons qu'évidemment, on aurait aussi pu résoudre cet exercice à l'aide de la formule de Stirling.

#### Exercice 145 : [énoncé]

- a)  $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{2n+1}{2n+2} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \sim -\frac{1}{2n}$ . La série  $\sum \ln u_{n+1} - \ln u_n$  tend vers  $-\infty$  donc  $\ln u_n \rightarrow -\infty$  puis  $u_n \rightarrow 0$ .
- b)  $\ln(n+1)u_{n+1} - \ln nu_n = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$ . La série  $\sum \ln(n+1)u_{n+1} - \ln nu_n$  tend vers  $+\infty$  donc  $\ln nu_n \rightarrow +\infty$  puis  $nu_n \rightarrow +\infty$ . À partir d'un certain rang  $nu_n \geq 1$  donc  $\sum u_n$  diverge.
- c)  $(2k+4)v_{k+1} = 2u_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}u_k = (2k+1)v_k$  en sommant pour  $k \in \{0, \dots, n\}$  et en simplifiant, on obtient :  $T_n = 2 - (2n+6)v_{n+1}$  donc  $T_n \rightarrow 2$ .

#### Exercice 146 : [énoncé]

a)

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(1 + \frac{a-b}{n}\right) \sim \frac{a-b}{n}$$

est le terme général d'une série divergeant vers  $-\infty$ . Par suite  $\ln u_n \rightarrow -\infty$  et donc  $u_n \rightarrow 0$ .

b)

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{a-b}{n}\right) = \frac{\alpha + a - b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour  $\alpha = b - a$ , la série des  $\ln v_{n+1} - \ln v_n$  converge. Par suite  $v_n$  converge vers un réel  $A > 0$  et alors

$$u_n \sim \frac{A}{n^{b-a}}$$

c) On a

$$(b-a-1)u_n = (1-b)(u_{n+1} - u_n) - ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$$

donc par télescopage

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{b-1}{b-a-1} u_0$$

#### Exercice 147 : [énoncé]

a)

$$\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} = 1 + \frac{\alpha + \beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$v_n = \frac{\alpha + \beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\beta = -\alpha$ .

b)

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ln(n^{-\alpha} u_n) \rightarrow \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$$

donc  $n^{-\alpha} u_n \rightarrow e^\ell$  puis  $u_n \sim A n^\alpha$  avec  $A = e^\ell > 0$ .

### Exercice 148 : [énoncé]

Notons que les termes de la suite  $(u_n)$  sont tous non nuls car  $-\alpha \notin \mathbb{N}^*$ .

a)  $\frac{(n+1)^\beta u_{n+1}}{n^\beta u_n} = 1 + \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $v_n = \frac{\alpha+\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .  $\sum v_n$  converge si, et seulement si,  $\beta = -\alpha$ .

b)  $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \ln(n^{-\alpha} u_n) \rightarrow \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \in \mathbb{R}$  donc  $n^{-\alpha} u_n \rightarrow e^\ell$  puis  $u_n \sim A n^\alpha$  avec  $A = e^\ell > 0$ .

### Exercice 149 : [énoncé]

Après calculs

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = O(1/n^2)$$

donc la suite  $(\ln u_n)$  converge et on peut conclure.

On peut aussi faire le lien avec la formule de Stirling...

### Exercice 150 : [énoncé]

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \int_0^1 \frac{v^n - 1}{v - 1} = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k dv$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u} du = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + o(1)$$

donc  $u_n \rightarrow -\gamma$

### Exercice 151 : [énoncé]

$\ln(P_n) = \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$  avec

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

donc  $\ln P_n = -\frac{1}{2} \ln n + \lambda + o(1)$  puis  $P_n \sim \frac{e^\lambda}{\sqrt{n}}$ .

### Exercice 152 : [énoncé]

a)  $u_n > 0$  et

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{a-1}{k}\right)$$

Si  $a = 1$  alors  $u_n = 1 \rightarrow 1$ .

Si  $a > 1$  alors

$$\ln\left(1 + \frac{a-1}{k}\right) \sim \frac{a-1}{k}$$

donc  $\ln u_n \rightarrow +\infty$  puis  $u_n \rightarrow +\infty$ .

Si  $a < 1$  alors  $\ln u_n \rightarrow -\infty$  et donc  $u_n \rightarrow 0$ .

b) Si  $a \geq 1$  il y a divergence grossière de la série.

Si  $a \in ]0; 1[$  alors

$$\ln u_n \sim \sum_{k=1}^n \frac{a-1}{k} = (a-1) \ln n$$

et donc

$$\ln(ku_n) = \ln k + (a-1) \ln k + o(\ln k) \sim a \ln k \rightarrow +\infty$$

Ainsi  $ku_n \rightarrow +\infty$  et à partir d'un certain rang  $u_n \geq 1/k$ .

La série de terme général  $u_n$  s'avère divergente

### Exercice 153 : [énoncé]

a)

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n \sim -\frac{1}{2} \frac{x}{n}$$

avec  $x > 0$  donc

$$\sum_{k=1}^n \ln u_{k+1} - \ln u_k \rightarrow -\infty$$

puis  $u_n \rightarrow 0$ .

b) Pour  $\alpha = -x/2$ ,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc il y a convergence de

$$\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

c) Puisque

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha} - \ln \frac{u_n}{n^\alpha}$$

la suite de terme général  $\ln \frac{u_n}{n^\alpha}$  converge puis  $\frac{u_n}{n^\alpha} \rightarrow A$  avec  $A > 0$ .

d) Par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha < -1$  i.e.  $x > 2$ .

#### Exercice 154 : [énoncé]

a) Par récurrence  $0 \leq u_n \leq u_0/2^n$ .

b)

$$\ln(2^{n+1}u_{n+1}) - \ln(2^n u_n) = \ln\left(\frac{\sin(u_n/2)}{u_n/2}\right) \sim -\frac{1}{6}\left(\frac{u_n}{2}\right)^2$$

est terme général d'une série convergente donc la suite  $(\ln(2^n u_n))$  converge et finalement  $(2^n u_n)$  converge vers un réel  $A$  strictement positif.

c)

$$u_n - A2^{-n} = 2^{-n} \sum_{k=n}^{+\infty} (2^k u_k - 2^{k+1} u_{k+1})$$

Or

$$2^k u_k - 2^{k+1} u_{k+1} \sim \frac{2^{k+1}}{6} \left(\frac{u_k}{2}\right)^3 \sim \frac{A^3}{24 \cdot 2^{2k}}$$

Par comparaison de restes de séries convergentes à termes positifs,

$$u_n - A2^{-n} \sim 2^{-n} \frac{A^3}{24} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{A^3}{18 \cdot 2^{-3n}}$$

#### Exercice 155 : [énoncé]

Non, en effet considérons

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $u_{np} - u_n = \sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k \ln k}$

On en déduit

$$0 \leq u_{np} - u_n \leq \frac{np - (n+1) + 1}{n \ln n} = \frac{p-1}{\ln n} \rightarrow 0$$

alors que

$$u_n \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{n+1} \rightarrow +\infty$$

#### Exercice 156 : [énoncé]

On observe que  $u_{n+1}^n - u_n^{n-1} = n$ .

Puisque  $\sum n$  une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer

$$u_{n+1}^n \sim \sum_{k=1}^n k \sim \frac{1}{2}n^2$$

En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient

$$n \ln u_{n+1} \sim 2 \ln n$$

puis

$$\ln u_{n+1} \sim 2 \frac{\ln n}{n}$$

Par suite  $u_{n+1} \rightarrow 1$  puis

$$u_{n+1} = 1 + 2 \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Posons

$$v_n = u_{n+1} - 1 - 2 \frac{\ln n}{n}$$

L'égalité

$$u_{n+1}^n = \exp\left(n \ln\left(1 + 2 \frac{\ln n}{n} + v_n\right)\right)$$

donne

$$u_{n+1}^n = \exp(2 \ln n + n v_n + O((\ln n)^2/n))$$

Or  $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2} \rightarrow 1$  donc

$$\exp(\ln(2) + nv_n + O((\ln n)^2/n)) \rightarrow 1$$

puis  $nv_n \rightarrow -\ln(2)$ . Ainsi

$$u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

### Exercice 157 : [énoncé]

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n u_k(n)$$

avec  $u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-k}$ .

On peut alors présumer

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{1 - 1/e} = \frac{e}{e - 1}$$

Il ne reste plus qu'à l'établir...

Puisque  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x > -1$ , on a

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \exp(n \ln(1 - k/n)) \leq e^{-k}$$

et donc on a déjà

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{1}{1 - 1/e}$$

De plus, pour  $N \in \mathbb{N}$ , on a pour tout  $n \geq N$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-k} \geq \frac{e}{e - 1} - \varepsilon$$

et pour ce  $N$  fixé, il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N'$ ,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{N-1} e^{-k} - \varepsilon$$

On a alors pour tout  $n \geq N'$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \frac{e}{e - 1} - 2\varepsilon$$

On peut donc conclure

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{e - 1}$$

### Exercice 158 : [énoncé]

Posons

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left| \frac{2n - k}{z_n - k} \right|$$

On a

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \frac{|z_n - k|^2}{|2n - k|^2}$$

Puisque

$$|z_n - k|^2 = (2n)^2 - 4nk \cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + k^2 = (2n - k)^2 + 8nk \sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$

on obtient

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{8nk}{(2n - k)^2} \sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) \right)$$

Sachant  $\sin^2 u = u^2 + O(u^4)$ , on peut écrire

$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi

$$\ln P_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{2kt^2}{(2n - k)^2} + \frac{k}{(2n - k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Sachant  $\ln(1+x) \leq x$ , on a

$$-2\ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^n \left[ \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

Posons  $S_n$  le second membre de cette comparaison. D'une part

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k}{(2n-k)^2} = \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{2(2n-\ell)}{\ell^2} = 4n \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell^2} - 2 \sum_{\ell=n}^{2n-1} \frac{1}{\ell}$$

avec

$$\sum_{\ell=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Après calculs asymptotiques, on obtient

$$S_n \rightarrow (2 - 2\ln 2)t^2$$

Sachant  $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$ , on a

$$-2\ln P_n \geq S_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right]^2$$

Puisque  $0 \leq \frac{k}{(2n-k)^2} \leq \frac{1}{n}$ ,

$$\sum_{k=1}^n \left[ \frac{2kt^2}{(2n-k)^2} + \frac{k}{(2n-k)^2} O\left(\frac{1}{n}\right) \right]^2 = \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$$

Finalement  $-2\ln P_n$  est encadré par deux quantités de limite  $(2 - 2\ln 2)t^2$ . On en déduit

$$P_n \rightarrow \exp((\ln 2 - 1)t^2)$$

### Exercice 159 : [énoncé]

Soient  $\sum u_n$  une série semi-convergente et  $\sum v_n$  une série absolument convergente. La série  $\sum u_n + v_n$  est convergente et si celle-ci était absolument convergente alors  $\sum u_n$  le serait aussi car  $|u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n|$ . La série  $\sum u_n + v_n$  n'est donc que semi-convergente.

### Exercice 160 : [énoncé]

Pour

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

on pose

$$u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Ceci définit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de sorte que ses premiers termes sont :

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Les termes sommés tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

### Exercice 161 : [énoncé]

- a) Pour  $u_n = (-1)^n$ , la série de terme général  $u_n$  est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle  $[0; 1]$ . Pour  $u_n = (-1)^n/(n+1)$ , la série de terme général  $u_n$  satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir  $\ln 2$ .

Pour  $u_n = 1/2^n$ , la série de terme général  $u_n$  converge. Puisque  $u_n \rightarrow 0$ , le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

n'est pas inférieur à  $u_{n+1}$ . Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.

- b) Posons pour la suite de notre étude

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On a

$$\theta_{n+2}u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$$

Puisque  $\theta_{n+2} > 0$  et  $\theta_{n+1} - 1 < 0$ , on peut affirmer que  $u_{n+2}$  et  $u_{n+1}$  sont de signes opposés.

Puisque  $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$  est du signe de  $u_{n+1}$ , les réels  $A - S_n$  et  $A - S_{n+1}$  sont de signes opposés et donc  $A$  est encadré par  $S_n$  et  $S_{n+1}$ .

- c) Puisque  $A - S_n$  est du signe de  $u_{n+1}$ , on peut écrire  $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$  avec  $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ .  
 Puisque  $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$  est du signe de  $u_{n+2}$  et puisque  $u_{n+1}$  et  $u_{n+2}$  sont de signes opposés, on a  $\theta_{n+1} - 1 \leq 0$  et donc  $\theta_{n+1} \in [0; 1]$ .  
 On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que  $A - S_n$  est non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 En effet pour  $u_n = (-1)^n$  et  $A = 1$ , la série de terme général  $u_n$  est alternée et pour  $n$  pair :  $A - S_n = 1 - 1 = 0$  est du signe de  $u_{n+1}$ .  
 pour  $n$  impair :  $A - S_n = 1 - 0 = 1$  est du signe de  $u_{n+1}$ .  
 Si en revanche, on suppose  $A - S_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , obtenir  $\theta_{n+1} \in ]0; 1[$  est désormais immédiat.
- d) Par l'absurde, supposons  $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$ .  
 On a  $A - S_n \leq u_{n+1}$  donc  $A - S_{n+1} \leq 0$  puis  $A - S_{n+2} \leq -u_{n+2}$  et donc  $|A - S_{n+2}| \geq |u_{n+2}|$ . Or  $|A - S_{n+2}| \leq |u_{n+3}|$  et  $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$ , c'est absurde et donc  $u_{n+1}$  et  $u_{n+2}$  ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général  $u_n$  est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).  
 Puisque  $A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1}$ , on a  
 $-|u_{n+1}| - u_{n+1} \leq A - S_{n+1} \leq |u_{n+1}| - u_{n+1}$ .  
 Si  $u_{n+1} > 0$  alors  $A - S_{n+1} \leq 0$  et donc du signe de  $u_{n+2}$ .  
 Si  $u_{n+1} < 0$  alors  $A - S_{n+1} \geq 0$  et donc à nouveau du signe de  $u_{n+2}$ .  
 Enfin  $A - S_{n+1}$  n'est pas nul, car sinon  
 $A - S_{n+3} = A - S_{n+1} - (u_{n+2} + u_{n+3}) = -(u_{n+2} + u_{n+3})$  est de signe strict opposé à  $u_{n+2}$  et n'est donc pas du signe de  $u_{n+4}$ .  
 On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général  $u_n$  encadre strictement  $A$ .

### Exercice 162 : [énoncé]

- a) Il est immédiat de vérifier que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{R}^N$  des suites réelles. L'application  
 $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi(u) = (u_0, u_1)$  étant un isomorphisme (car un élément de  $E$  est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace  $E$  est de dimension 2.
- b) Il est immédiat de vérifier que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.  
 Ainsi

$$\forall n \geq 2, a_n, b_n \geq 1$$

et donc

$$a_{n+2} \geq n+1 \text{ et } b_{n+2} \geq n+1$$

Ainsi les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  tendent vers  $+\infty$  en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)

c) On a

$$w_{n+1} = ((n+1)a_{n+1} + a_n)b_{n+1} - a_{n+1}((n+1)b_{n+1} + b_n)$$

Après simplification, on obtient

$$w_{n+1} = -w_n$$

et donc

$$w_n = (-1)^n w_0 = (-1)^{n+1}$$

d) On a

$$c_{n+1} - c_n = \frac{w_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}$$

Puisque la suite de terme général  $b_n b_{n+1}$  croît vers  $+\infty$ , on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique  $\sum (c_{n+1} - c_n)$  converge. Par conséquent la suite  $(c_n)$  converge.

e) On a

$$\ell - c_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (c_{k+1} - c_k)$$

Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme

$$|\ell - c_n| \leq \frac{1}{b_n b_{n+1}}$$

On peut ainsi écrire

$$c_n = \ell + o\left(\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right)$$

On a alors

$$a_n + r b_n = b_n (c_n + r) = b_n (\ell + r) + o\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right)$$

Sachant  $b_n \rightarrow +\infty$ , on peut affirmer

$$a_n + r b_n \rightarrow 0 \iff r = -\ell$$

**Exercice 163 :** [\[énoncé\]](#)

a) Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut écrire

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$$

Par intégrabilité de  $f''$ , la fonction  $f'$  admet une limite finie  $\ell$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

Si  $\ell > 0$  alors, pour  $x$  assez grand  $f'(x) \geq \ell/2$ . Notons  $A \geq 0$  tel que ce qui précède soit vrai pour  $x \geq A$ . On a alors

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \geq f(0) + \int_0^A f'(t) dt + \int_A^x \frac{\ell}{2} dt$$

et donc  $f(x) \geq \ell x/2 + C^{te}$  ce qui empêche la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

Si  $\ell < 0$  on obtient aussi une absurdité. Il reste donc  $\ell = 0$ .

Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$F(x+1) = F(x) + f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$F(x), F(x+1) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Aussi  $f'(x) \rightarrow 0$  et

$$\left| \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt \right| \leq \max_{t \in [x; x+1]} |f'(t)| \rightarrow 0$$

donc par opération  $f(x) \rightarrow 0$ .

b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_n^{n+1} ((n+1)-t)f''(t) dt$$

donc

$$f'(n) = f(n+1) - f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$$

La série de terme général  $f(n+1) - f(n)$  est convergente car de même nature que la suite  $(f(n))$  qui converge en  $+\infty$ . La série de terme général  $\int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$  est absolument convergente car

$$\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f''(t)| dt$$

et le terme majorant est sommable par intégrabilité de  $f''$ .

Par conséquent, la série  $\sum f'(n)$  est convergente.

Aussi

$$F(n+1) = F(n) + f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} f''(t) dt$$

On peut alors mener le même raisonnement et conclure que  $\sum f(n)$  converge.

**Exercice 164 :** [\[énoncé\]](#)

a) Puisque  $|d_n e_n| \leq e_n$  avec convergence de  $\sum e_n$ , on peut affirmer que les éléments de  $G$  sont des sommes de séries absolument convergentes. Les éléments de  $G$  sont donc bien définis et puisque

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e_n = s$$

on a  $G \subset [-s; s]$ . Enfin  $s \in G$  avec  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $-s \in G$  avec  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)_{n \in \mathbb{N}}$ .

b) Si  $e$  est une base discrète alors  $G = [-s; s]$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $e_N > r_N$ .

Introduisons

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} e_k \in [-s; s]$$

(comprendre  $x = 0$  si  $N = 0$ ).

Soit

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \text{ avec } d_n \in \{-1, 1\}$$

S'il existe  $k \leq N$  tel que  $d_k = -1$  alors

$$y \leq \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n - 2e_k = s - 2e_k$$

Or

$$e_k \geq e_N$$

donc

$$y < s - 2e_N = x + r_N - e_N < x$$

Si  $d_k = 1$  pour tout  $k \leq N$  alors

$$y = \sum_{n=0}^N e_k + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_k e_k \geq x + e_N - r_N > x$$

Dans tous les cas,  $y \neq x$  et donc  $x \notin G$ . C'est absurde.

c) Raisonnons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Cas  $n = 0$  : on a bien

$$|t - t_0| = |t| \leq s = e_0 + r_0$$

Supposons la propriété vérifiée au rang  $n \geq 0$ .

Si  $t_n \leq t$  alors

$$t - t_{n+1} = t - t_n - e_n \leq r_n$$

et

$$t - t_{n+1} \geq -e_n \geq -r_n$$

Ainsi

$$|t - t_{n+1}| \leq r_n = e_{n+1} + r_{n+1}$$

Si  $t_n > t$  alors

$$t_{n+1} - t = t_n - t - e_n$$

et l'étude est analogue.

Récurrence établie.

On en déduit que  $t_n \rightarrow t$  puis que  $t \in G$ .

En conclusion

$e$  est une base discrète si, et seulement si,  $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq r_n$

d) La condition précédente est vérifiée et, puisque  $s = 2$ , on obtient  $G = [-2; 2]$ .

On peut écrire

$$0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1) \frac{1}{2^n}, 1 = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1) \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et

$$2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

En remarquant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

on peut proposer

$$\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$$

Il peut y avoir unicité de la suite  $(d_n)$  (c'est le cas pour  $x = s$ ) ou non (c'est le cas pour  $x = 0$  où lorsque  $(d_n)$  convient,  $(-d_n)$  convient aussi).

### Exercice 165 : [énoncé]

a) On a

$$\Sigma_n = \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n e^{ik} \right) = \operatorname{Im} \left( e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leq \left| e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

et la suite  $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$  est effectivement bornée.

b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or  $\frac{\Sigma_n}{n+1} \rightarrow 0$  car  $(\Sigma_n)$  est bornée et  $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que  $(S_n)$  converge.

### Exercice 166 : [énoncé]

a) Par sommation géométrique

$$S_n = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right)$$

donc

$$|S_n| \leq \left| \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$$

b) On a

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}$$

Or

$$\frac{S_N}{N+1} \rightarrow 0 \text{ et}$$

$\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc la suite des sommes partielles de la série de terme général  $u_n$  converge.

c) On a

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

donc

$$|u_n| \geq \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n}$$

Si  $\theta = 0 \quad [\pi]$  alors  $|u_n| \geq \frac{1}{n}$  et donc  $\sum |u_n|$  diverge.

Si  $\theta \neq 0 \quad [\pi]$  alors par ce qui précède la série  $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$  converge et puisque la série de terme général  $\frac{1}{n}$  diverge, par opérations, la série de terme général  $|u_n|$  diverge.

### Exercice 167 : [énoncé]

a)  $(a_n - a_{n+1})S_n = O(a_n - a_{n+1})$  et la série à termes positifs  $\sum a_n - a_{n+1}$  est convergente.

b) En séparant la somme en deux et en décalant les indices

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1})S_k = \sum_{k=0}^n a_k S_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k S_{k-1}$$

puis en regroupant

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1})S_k = a_0 S_0 + \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1}) - a_{n+1} S_n$$

avec  $a_{n+1}S_n \rightarrow 0$ .

Par suite  $\sum a_n (S_n - S_{n-1})$  est convergente.

c) On applique le résultat précédent à  $a_n = 1/n$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ .  $(S_n)$  est bien bornée car

$$S_n = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \cos(nx) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

### Exercice 168 : [énoncé]

On a

$$S_n = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right)$$

donc

$$|S_n| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} = M_\theta$$

Posons  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ .

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1) - x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)^2} \leq 0$$

donc  $f$  est décroissante sur  $[2; +\infty[$ .

$u_n = f(n) \cos(n\theta) = f(n) (S_n - S_{n-1})$  donc

$$\sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N f(n) S_n - \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) S_n = \sum_{n=2}^N (f(n) - f(n+1)) S_n + f(N+1) S_N - f(2) S_1$$

Or  $f(N+1)S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  car  $S_N = O(1)$  et  $f \xrightarrow{+\infty} 0$ .

De plus

$$|(f(n) - f(n+1)) S_n| \leq M_\theta (f(n) - f(n+1))$$

avec  $\sum f(n) - f(n+1)$  série convergente (car  $f$  converge en  $+\infty$ ) donc par comparaison  $\sum (f(n) - f(n+1)) S_n$  est absolument convergente.

Ainsi par opérations,  $\left( \sum_{n=2}^N u_n \right)_{N \geq 2}$  converge et donc  $\sum u_n$  converge.

On a

$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1} |\cos(n\theta)| \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos^2(n\theta)$$

Or  $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$  donc  $\cos^2 a \geq \frac{1}{2} \cos 2a + 1$  puis

$$|u_n| \geq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(2n\theta) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

En reprenant l'étude qui précède avec  $2\theta$  au lieu de  $\theta$ , on peut affirmer que

$$\sum \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(2n\theta)$$

converge tandis que  $\sum \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$  diverge puisque  $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

Par comparaison, on peut affirmer que  $\sum |u_n|$  diverge.

### Exercice 169 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

On a

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N+1}$$

Or  $\frac{S_N}{N+1} \rightarrow 0$  car  $(S_N)$  converge et  $\frac{S_n}{n(n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  est le terme général d'une série absolument convergente. On peut conclure que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n}$  converge.

### Exercice 170 : [énoncé]

Posons

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} z_k$$

On a  $z_n = R_n - R_{n+1}$  et donc

$$\sum_{k=n}^N \frac{z_k}{k} = \sum_{k=n}^N \frac{R_k - R_{k+1}}{k} = \sum_{k=n}^N \frac{R_k}{k} - \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{R_k}{k-1}$$

puis

$$\sum_{k=n}^N \frac{z_k}{k} = \frac{R_n}{n} - \sum_{k=n+1}^N \frac{R_k}{k(k-1)} - \frac{R_{N+1}}{N}$$

La suite  $(R_n)$  converge vers 0, elle est donc bornée par un certain  $M$  ce qui assure l'absolue convergence de la série  $\sum \frac{R_k}{k(k-1)}$  et l'on peut donc introduire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z_k}{k} = \frac{R_n}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{R_k}{k(k-1)}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, |R_n| \leq \varepsilon$$

et alors pour tout  $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{k(k-1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{M}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varepsilon \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{\varepsilon}{n}$$

puis

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{z_k}{k} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{n}$$

### Exercice 171 : [énoncé]

Le cas  $\alpha = 1$  est entendu. Étudions  $\alpha \in ]-\infty; 1[$ .

Par l'absurde, supposons la convergence de  $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$  et introduisons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^\alpha}$$

de sorte que  $S_n - S_{n-1} = a_n/n^\alpha$ .

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k^{1-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^\alpha}$$

puis

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^n S_k \left( \frac{1}{k^{1-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}} \right) + \frac{S_n}{(n+1)^{1-\alpha}}$$

La suite  $(S_n)$  est bornée car convergente et

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k^{1-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}} \rightarrow 1$$

il y a donc absolue convergence de la série

$$\sum S_n \left( \frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}} \right)$$

et l'on en déduit la convergence de  $\sum \frac{a_n}{n}$ .  
C'est absurde.

### Exercice 172 : [énoncé]

a) On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1} (*)$$

Montrons que la convergence de  $\sum u_n$  entraîne que  $n u_n \rightarrow 0$ .

Posons  $S_n$  les sommes partielles de  $\sum u_n$ .

Par la décroissance de  $u_n$ , on a  $0 \leq n u_{2n} \leq S_{2n} - S_n$ .

Par suite  $n u_{2n} \rightarrow 0$  et aussi  $2n u_{2n} \rightarrow 0$ .

De façon semblable, on obtient  $n u_{2n+1} \rightarrow 0$  puis  $(2n+1) u_{2n+1} \rightarrow 0$ .

Ainsi  $n u_n \rightarrow 0$  et donc

$$\sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

b) Supposons que la série de terme général  $v_n$  converge.

Si la série de terme général  $u_n$  converge alors  $u_n \rightarrow 0$ .

Inversement, supposons que  $u_n \rightarrow 0$ . On peut écrire

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}$$

On a alors

$$0 \leq n u_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} v_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

Puisque la série des  $v_n$  converge,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \rightarrow 0 \text{ puis } n u_n \rightarrow 0$$

La relation (\*) entraîne alors la convergence de  $\sum u_n$ .

c)  $u_n = 1$  convient, où si l'on veut une suite non constante,  $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

### Exercice 173 : [énoncé]

Posons  $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ . On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$$

Si la série  $\sum u_n$  converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série  $\sum v_n$  converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées.

Inversement, supposons la convergence de  $\sum v_n$ .

Puisque la suite  $(u_n)$  est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leq u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc  $(n+1)u_{n+1} \rightarrow 0$ . La relation

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de  $\sum u_n$  ainsi que l'égalité des sommes des séries.

### Exercice 174 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k (S_k - S_{k-1})$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne (sachant  $S_0 = 0$ )

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})S_k + a_{n+1}S_n$$

La suite  $(S_n)$  converge, elle est donc bornée par un certain réel  $M$ .

D'une part  $a_n \rightarrow 0$  et donc  $a_{n+1}S_n \rightarrow 0$ .

D'autre part  $|(a_k - a_{k+1})S_k| \leq M|a_k - a_{k+1}|$  et donc la série  $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$  converge absolument.

Par addition de convergence, on peut conclure que la série  $\sum a_n^2$  converge.

### Exercice 175 : [énoncé]

a) C'est la convergence de  $u_n$  vers  $\ell$ .

b) On a

$$|v_n - \ell| = \frac{1}{n} |(u_1 - \ell) + \dots + (u_n - \ell)|$$

et par l'inégalité triangulaire

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \dots + |u_n - \ell|}{n}$$

On conclut en exploitant  $|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $k > n_0$ .

c) Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} = \frac{C^{te}}{n} \rightarrow 0$$

donc pour  $n$  assez grand

$$\frac{|u_1 - \ell| + \dots + |u_{n_0} - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi il existe un rang  $n_1$  au-delà duquel

$$|v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

d) On applique le résultat précédent à la suite de terme général  $u_{n+1} - u_n$  et on peut affirmer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \rightarrow \alpha$$

Après télescopage

$$\frac{1}{n} (u_n - u_0) \rightarrow \alpha$$

puis

$$\frac{1}{n} u_n \rightarrow \alpha$$

et enfin

$$u_n \sim \alpha n$$

### Exercice 176 : [énoncé]

a) Supposons  $\ell = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n > n_0, |u_n| \leq \varepsilon/2$$

On a alors

$$|v_n| \leq \left| \frac{u_1 + \dots + n_0 u_{n_0}}{n^2} \right| + \left| \frac{(n_0 + 1)u_{n_0+1} + \dots + n u_n}{n^2} \right| \leq \frac{C^{te}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour  $n$  assez grand.

Ainsi  $v_n \rightarrow 0$ .

Cas général :  $u_n = \ell + w_n$  avec  $w_n \rightarrow 0$  :

$$v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} \ell + \frac{w_1 + \dots + n w_n}{n^2} \rightarrow \frac{\ell}{2}$$

b) On peut écrire

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{(u_n - u_{n-1}) + \dots + (u_1 - u_0)}{n^2} + \frac{u_0}{n^2}$$

donc

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{n \frac{(u_n - u_{n-1})}{n} + \dots + \frac{(u_1 - u_0)}{1}}{n^2} + \frac{u_0}{n^2} \rightarrow \frac{\ell}{2}$$

### Exercice 177 : [énoncé]

On a  $\ln u_{n+1} - \ln u_n \rightarrow \ln \ell$  donc par Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln u_k - \ln u_{k-1} \rightarrow \ln \ell$$

d'où

$$\frac{1}{n} \ln u_n \rightarrow \ln \ell$$

puis

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$$

### Exercice 178 : [\[énoncé\]](#)

a) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est bien définie et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  car

$$\forall x > 0, \ln(1+x) > 0$$

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante car

$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$$

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est aussi minorée par 0 donc convergente.

En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que  $(u_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0.

b)

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n u_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

car  $u_{n+1} \sim u_n$ .

c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Finalement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

### Exercice 179 : [\[énoncé\]](#)

a) La suite  $(u_n)$  est décroissante car

$$\forall x \in [0; \pi/2], \sin x \leq x$$

La suite  $(u_n)$  est aussi minorée par 0 donc convergente.

En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que  $(u_n)$  tend vers 0.

b)

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

car  $u_{n+1} \sim u_n$ .

c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n} \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Finalement

$$u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$$

### Exercice 180 : [\[énoncé\]](#)

On sait  $R_n \rightarrow 0$  donc

$$R_{n-1} = R_n + u_n = R_n + R_n^2 + o(R_n^2) = R_n + o(R_n) \sim R_n$$

et par conséquent

$$\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n-1}} = \frac{u_n}{R_n R_{n-1}} \sim \frac{R_n^2}{R_n^2} \rightarrow 1$$

Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_{k-1}} \right) \rightarrow 1$$

et donc

$$\frac{1}{n} \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_0} \right) \rightarrow 1$$

Enfin, sachant  $R_n \rightarrow 0$  et  $R_0$  constant

$$R_n \sim \frac{1}{n} \text{ puis } u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

**Exercice 181 :** [\[énoncé\]](#)

On remarque

$$v_n \geq u_{2^n} + u_{2^{n+1}} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^n v_k \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k$$

Ainsi, si  $\sum u_n$  diverge alors  $\sum v_n$  aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Aussi

$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n v_k$$

Ainsi, si  $\sum u_n$  converge alors  $\sum v_n$  aussi par comparaison de séries à termes positifs.

**Exercice 182 :** [\[énoncé\]](#)

a) On remarque

$$p^n(p-1)u_{p^{n+1}} \leq \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \leq p^n(p-1)u_{p^n}$$

et donc

$$\frac{p-1}{p} \sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \leq \sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p-1) \sum_{\ell=0}^n v_\ell$$

Si  $\sum u_n$  converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \leq \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série  $\sum v_n$  car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

Si  $\sum v_n$  converge alors la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq (p-1) \sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell$$

et puisque les sommes partielles de la série  $\sum u_n$  sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure à la convergence de la série  $\sum u_n$ .

b) Prenons  $p = 2$  et

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}$$

La suite  $(u_n)$  est décroissante positive et

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2}$$

Puisque  $\sum v_n$  diverge,  $\sum u_n$  diverge aussi.

Prenons toujours  $p = 2$  et cette fois-ci

$$u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$$

La suite  $(u_n)$  est décroissante positive et

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2 \ln(n \ln 2)} \sim \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n \ln n}$$

et à nouveau nous pouvons conclure à la divergence de  $\sum u_n$ .

**Exercice 183 :** [\[énoncé\]](#)

On remarque

$$(2n+1)u_{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq (2n+1)u_{n^2}$$

et donc

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} (2\ell-1)u_{\ell^2} \leq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} u_k \leq \sum_{\ell=0}^n (2\ell+1)u_{\ell^2}$$

Si  $\sum u_n$  converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell u_{\ell^2} \leq \sum_{\ell=1}^{n+1} (2\ell-1)u_{\ell^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série  $\sum v_n$  car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.

Si  $\sum v_n$  converge alors la série  $\sum u_{n^2}$  converge aussi car

$$0 \leq u_{n^2} \leq n u_{n^2} = v_n$$

On en déduit la convergence de  $\sum (2n+1)u_{n^2}$  et la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1)u_{\ell^2}$$

Puisque les sommes partielles de la série  $\sum u_n$  sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure la convergence de la série  $\sum u_n$ .

**Exercice 184 :** [\[énoncé\]](#)

Supposons que  $\sum v_n$  converge. Pour  $n^2 \leq k < (n+1)^2$ ,

$$0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{v_n}{n^2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$

ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs  $\sum u_n$  sont majorées et donc  $\sum u_n$  converge.

Inversement, pour  $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$  on a  $v_n = \frac{1}{n}$  de sorte que  $\sum u_n$  converge et  $\sum v_n$  diverge.