

Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 [01568] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2 [01569] [Correction]

Montrer que

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$.

Exercice 3 [01570] [Correction]

Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Exercice 4 [01571] [Correction]

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(u, v) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$$

À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d a-t-on φ produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 [01580] [Correction]

On définit une application $\varphi: \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta}) d\theta$$

- Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Calcul dans un espace préhilbertien

Exercice 6 [01572] [Correction]

Soit E espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation

$$(a | x) = \lambda$$

d'inconnue $x \in E$.

Exercice 7 [00507] [Correction]

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2$$

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ constitue une base orthonormée de E .

Exercice 8 [00508] [Correction]

Soient E un espace préhilbertien réel et $f, g: E \rightarrow E$ telles que

$$\forall x, y \in E, (f(x) | y) = (x | g(y))$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 9 [00509] [Correction]

Soient E un espace préhilbertien réel et $f: E \rightarrow E$ une application surjective telle que pour tout $x, y \in E$, on ait

$$(f(x) | f(y)) = (x | y)$$

Montrer que f est un endomorphisme de E .

Exercice 10 [00510] [Correction]

Soient x, y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}$$

Exercice 11 [03180] [Correction]

Soit S l'ensemble des vecteurs de norme 1 d'un espace préhilbertien réel. Montrer

$$\forall x, y \in S, x \neq y \implies \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, (1 - \lambda)x + \lambda y \notin S$$

Calcul dans un espace euclidien

Exercice 12 [00521] [Correction]

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E telle que

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^n (e_k | x)^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 13 [01584] [Correction]

Soient E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, (f(x) | y) = (x | f(y))$$

- Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est symétrique.
- Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 14 [00522] [Correction]

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x, y \in E, (f(x) | y) = (x | f(y))$$

Montrer

$$\text{Im } f = (\ker f)^\perp$$

Exercice 15 [00523] [Correction]

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x \in E, (f(x) | x) = 0$$

Comparer $\ker f$ et $\text{Im } f$.

Exercice 16 [02396] [Correction]

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{tr}(u) = 0$.

- Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x) | x \rangle = 0$.

- Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 17 [02733] [Correction]

Soient $c \in \mathbb{R}$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires de E deux à deux distincts tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = c$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que $(v_1, \dots, v_n)$ soit nécessairement liée.

Inégalité de Cauchy Schwarz

Exercice 18 [01575] [Correction]

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Étudier les cas d'égalités.

Exercice 19 [01576] [Correction]

Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Préciser les cas d'égalité.

Exercice 20 [01577] [Correction]

On considère $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f | g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Pour f strictement positive sur $[a; b]$ on pose

$$\ell(f) = \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{dt}{f(t)}$$

Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$.
Étudier les cas d'égalités.

Exercice 21 [01578] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.
Montrer

$$I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$$

Exercice 22 [00504] [Correction]

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer

$$(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(B^2)$$

Exercice 23 [03883] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 < 1$$

a) Montrer

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t X A X > 0$$

b) En déduire que la matrice A est inversible.

Orthogonalité

Exercice 24 [01579] [Correction]

Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

Exercice 25 [00303] [Correction]

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x, y \in E, x \perp y \implies f(x) \perp f(y)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel

Exercice 26 [01585] [Correction]

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E .
Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercice 27 [03081] [Correction]

Soit $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

On pose

$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [-1; 0], f(t) = 0\} \text{ et } G = \{g \in E \mid \forall t \in [0; 1], g(t) = 0\}$$

a) Montrer que $F^\perp = G$.

b) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 28 [00516] [Correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^t A B)$$

a) Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

b) Observer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

c) Établir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\operatorname{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\operatorname{tr}({}^t A A)}$$

et préciser les cas d'égalité.

Algorithme de Gram-Schmidt

Exercice 29 [01581] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (-1, 1, 0)$$

Exercice 30 [03805] [Correction]

- a) Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
 b) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

Projections et symétries orthogonales**Exercice 31** [01588] [Correction]

On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 32 [01589] [Correction]

On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale sur le plan P d'équation $x = z$.

Exercice 33 [01590] [Correction]

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$$

- a) Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F .
 b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F .
 c) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F .
 d) Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 34 [01591] [Correction]

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
 Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 35 [01592] [Correction]

Soient a et b deux vecteurs distincts d'un espace vectoriel euclidien E tels que

$$\|a\| = \|b\|$$

Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b .

Exercice 36 [01593] [Correction]

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure à 2.

Soient x et y deux vecteurs distincts de E tels que $(x \mid y) = \|y\|^2$.

Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = p_H(x)$.

Exercice 37 [01594] [Correction]

Soit $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$.

Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

- a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
 b) On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.
 Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.
 c) Soit $\psi: f \mapsto \hat{f}$ avec $\hat{f}: x \mapsto f(-x)$.
 Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 38 [01596] [Correction]

Soit E un espace vectoriel euclidien, H et H' deux hyperplans de E .

On note s et s' les réflexions par rapport à H et H' .

À quelle condition s et s' commutent-elles et préciser alors $s \circ s'$.

Exercice 39 [03403] [Correction]

Soient x et y deux vecteurs non nul d'un espace euclidien E .
 À quelle condition sur x et y , le projeté orthogonal du vecteur x sur la droite $\text{Vect}(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur la droite $\text{Vect}(x)$?

Exercice 40 [03803] [Correction]

Montrer que la matrice

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Calculer $\det(M)$. Qu'en déduire d'un point de vue géométrique ?

Donner les caractéristiques géométriques de M .

Distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 41 [00073] [Correction]

On munit $E = \mathcal{C}([-1; 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(fg | =) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

- Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.
- Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2) .
- Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F .

Exercice 42 [00527] [Correction]

- Montrer que $(P | Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- Calculer $d(X^2, P)$ où $P = \{aX + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 43 [02736] [Correction]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 44 [03764] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$$

Exercice 45 [03117] [Correction]

- Montrer que $(A | B) = \text{tr}(A^t B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
 Exprimer la distance de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

- Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
 Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 46 [02571] [Correction]

- Montrer que $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = x$.
- Pour quels réel a et b la distance de $f_2(x)$ à $g(x) = ax + b$ est-elle minimale ?

Exercice 47 [01598] [Correction]

Soient n un entier supérieur à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

a) Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$$

définit un produit scalaire sur E .

b) Calculer

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$$

Exercice 48 [02734] [\[Correction\]](#)

Calculer le minimum de

$$\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$$

pour a, b, c parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 49 [01599] [\[Correction\]](#)

[Déterminant de Gram] Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E .

On note

$$G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i | x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a) Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors

$$\det G(x_1, \dots, x_n) = 0$$

b) On suppose désormais que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et on pose

$$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F .

Exprimer $G(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de M et de ${}^t M$. En déduire que

$$\det G(x_1, \dots, x_n) > 0$$

c) On introduit de plus $x \in E$. Montrer que

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}}$$

Exercice 50 [00526] [\[Correction\]](#)

[Déterminant de Gram] Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E , on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $\langle u_i, u_j \rangle$.

a) Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée alors

$$\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$$

b) Établir la réciproque.

c) Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x \in E$,

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

Exercice 51 [04080] [\[Correction\]](#)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

b) Exprimer la distance à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

c) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Isométries vectorielles

Exercice 52 [01600] [\[Correction\]](#)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\forall x, y \in E, (f(x) | f(y)) = (x | y) \iff \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

Exercice 53 [00344] [\[Correction\]](#)

Soient f une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E et $F = \ker(f - \text{Id})$. Montrer

$$f(F^\perp) = F^\perp$$

Exercice 54 [01601] [Correction]

Soit $f: E \rightarrow E$ une application vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 55 [01603] [Correction]

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f(F) \subset F$.

Montrer

$$f(F) = F \text{ et } f(F^\perp) = F^\perp$$

Exercice 56 [01605] [Correction]

Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E . On pose $g = f - \text{Id}$.

- Montrer que $\text{Im } g = (\ker g)^\perp$.
- Soit p la projection orthogonale sur $\ker g$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère

$$p_n = \frac{1}{n}(\text{Id} + f + f^2 + \cdots + f^{n-1})$$

Démontrer que pour tout $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(p_n - p)(x)\| = 0$$

Exercice 57 [00343] [Correction]

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f \in \mathcal{O}(E)$.
Montrer

$$f(F^\perp) = f(F)^\perp$$

Exercice 58 [01606] [Correction]

Soient a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E , α un réel et $f_\alpha: E \rightarrow E$ l'application définie par

$$f_\alpha(x) = x + \alpha(x \mid a) \cdot a$$

- Montrer que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour le produit de composition et observer que f_α et f_β commutent.
- Calculer f_α^p pour $p \in \mathbb{N}$.
- Montrer que f_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1$. Quelle est la nature de f_{-1} ?
- Montrer

$$f_\alpha \in \mathcal{O}(E) \iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2$$

Quelle est la nature de f_{-2} ?

Exercice 59 [00346] [Correction]

Soient E un espace vectoriel euclidien et $f: E \rightarrow E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

En observant que l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée montrer que f est linéaire.

Matrices orthogonales

Exercice 60 [03926] [Correction]

Soient A et B dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A + 2B)/3$ appartienne à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?

Exercice 61 [00339] [Correction]

Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Exercice 62 [02404] [Correction]

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$$

- Montrer

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

c) Peut-on avoir simultanément :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n} \text{ et } \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| = n ?$$

Exercice 63 [02743] [\[Correction\]](#)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

Exercice 64 [02745] [\[Correction\]](#)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

a) Montrer

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\}$$

b) Montrer

$$M \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

c) Montrer que M est dans $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k \in [0; 4/27]$ tel que a, b et c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$.

Exercice 65 [02747] [\[Correction\]](#)

Soit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$(\det A)^2 = (\det D)^2$$

Exercice 66 [02926] [\[Correction\]](#)

Soient p, q, r des réels et

$$A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

Montrer que A est une matrice de rotation si, et seulement si, p, q, r sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + a$ où a est à préciser. Indiquer les éléments de la rotation.

Exercice 67 [03171] [\[Correction\]](#)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant

$$A^t A = {}^t A A$$

Montrer que la matrice $\Omega = {}^t A^{-1} A$ est orthogonale.

Isométries du plan

Exercice 68 [01607] [\[Correction\]](#)

Soit u et v deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté. Quels sont les isométries vectorielles qui envoient u sur v ?

Exercice 69 [01608] [\[Correction\]](#)

Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E . Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 70 [01609] [\[Correction\]](#)

À quelle condition une réflexion σ et une rotation r du plan commutent ?

Mesures angulaires

Exercice 71 [01597] [\[Correction\]](#)

Soient E un espace vectoriel euclidien et u, v, w trois vecteurs unitaires. On pose

$$\alpha = \text{Ecart}(u, v), \beta = \text{Ecart}(v, w) \text{ et } \theta = \text{Ecart}(u, w)$$

En projetant v sur un plan contenant u et w , montrer que $\theta \leq \alpha + \beta$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.

Si $\varphi(P, P) = 0$ alors

$$\sum_{k=0}^n P(k)^2 = 0$$

donc

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(k) = 0$$

Ainsi P admet au moins $n + 1$ racines, or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]

Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.

Si $\varphi(f, f) = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on a pour tout $t \in [-1; 1]$, $f(t)^2(1 - t^2) = 0$ et donc pour tout $t \in]-1; 1[$, $f(t) = 0$.

Par continuité de f en 1 et -1 , on obtient $f(t) = 0$ sur $[-1; 1]$.

On peut alors conclure que φ est un produit scalaire.

Exercice 3 : [énoncé]

φ est clairement une forme bilinéaire symétrique.

On a aussi $\varphi(f, f) \geq 0$ et

$$\varphi(f, f) = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } f' = 0$$

car f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit

$$\varphi(f, f) = 0 \implies f = 0$$

Exercice 4 : [énoncé]

Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire.

Supposons que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

En prenant $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, la symétrie $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ donne $b = c$.

On a

$$\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2$$

Pour $u = (1, 0)$, $\varphi(u, u) > 0$ donne $a > 0$.

$$\varphi(u, u) = ax^2 + 2bxy + dy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ad - b^2}{a}y^2$$

Pour $u = (-b, a)$, $\varphi(u, u) > 0$ donne

$$ad > b^2$$

Inversement, si $a > 0$, $ad > b^2$ et $b = c$ alors en reprenant l'étude ci-dessus, on montre que φ est un produit scalaire.

Exercice 5 : [énoncé]

a) Par le changement de variable réelle $\xi = -\theta$, on vérifie

$$\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$$

D'autre part

$$\overline{\varphi(P, Q)} = \varphi(Q, P) = \varphi(P, Q)$$

donc $\varphi(P, Q) \in \mathbb{R}$.

φ est donc une application symétrique à valeurs réelles.

La bilinéarité et la positivité ne posent pas de problèmes.

Si $\varphi(P, P) = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on a

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P(e^{i\theta}) = 0$$

Le polynôme réel P admet alors une infinité de racines complexes situées sur

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

b) La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Elle est orthonormale car

$$\varphi(X^k, X^\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\ell)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6 : [énoncé]

Considérons le vecteur

$$x_0 = \frac{\lambda}{\|a\|^2} a$$

On a

$$(a \mid x_0) = \lambda$$

et donc $x_0 \in \mathcal{S}$.

Soit $x \in E$,

$$x \in \mathcal{S} \iff (a \mid x - x_0) = 0$$

donc

$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Vect}(a)^\perp$$

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | e_j)^2$$

donc $(e_i | e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormée. Si la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ n'est pas une base, on peut déterminer $e_{n+1} \in E$ tel que $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$ soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut se ramener au cas où

$$e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$$

Mais alors

$$\|e_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | e_{n+1})^2 = 0$$

ce qui est contradictoire.

Par suite la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

Aisément

$$(f(\lambda x + \lambda' x') | y) = \dots = (\lambda f(x) + \lambda' f(x') | y)$$

et comme ceci vaut pour tout y on peut conclure à la linéarité de f .
Idem pour g .

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

$$\begin{aligned} (f(\lambda x + \lambda' x') | f(y)) &= (\lambda x + \lambda' x' | y) \\ &= \lambda (x | y) + \lambda' (x' | y) \\ &= \lambda (f(x) | f(y)) + \lambda' (f(x') | f(y)) \\ &= (\lambda f(x) + \lambda' f(x') | f(y)) \end{aligned}$$

donc

$$f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x')) \in (\text{Im } f)^\perp = \{0\}$$

d'où la linéarité de f .

En fait, l'hypothèse de surjectivité n'est pas nécessaire pour résoudre cet exercice mais permet un « argument rapide ».

Exercice 10 : [\[énoncé\]](#)

En développant le produit scalaire

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 2 \frac{(x | y)}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|} \right)^2$$

Exercice 11 : [\[énoncé\]](#)

Soient $x, y \in S$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|^2 = \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(x | y) + (1 - \lambda)^2$$

qui est une expression polynomiale en λ dont le coefficient du second degré est

$$2 - 2(x | y)$$

Puisque les vecteurs x et y sont distincts et de même norme, ils ne peuvent être positivement liés et donc

$$(x | y) < \|x\| \|y\| = 1$$

Par suite

$$2 - 2(x | y) > 0$$

Ainsi la quantité $\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|^2$ est une expression polynomiale du second degré exactement. Puisque celle-ci prend la valeur 1 pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = 1$, elle ne peut reprendre la valeur 1 pour aucune autre valeur λ et ceci permet de conclure.

Exercice 12 : [\[énoncé\]](#)

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_k | e_j)^2$$

donc $(e_k | e_j) = 0$ pour tout $k \neq j$. Ainsi la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale.

Soit $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$. On a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (e_k | x)^2 = 0$$

donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0\}$ puis $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$. Par suite la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice et c'est bien entendu une famille libre (car orthonormale) donc une base de E .

Exercice 13 : [énoncé]

- a) $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (e_i | f(e_j)) = (f(e_i) | e_j) = a_{j,i}$.
- b) Soit $x \in \ker f$ et $z = f(y) \in \text{Im } f$.
 $(x | z) = (x | f(y)) = (f(x) | y) = (0 | y) = 0$ donc $\ker f \subset \text{Im } f^\perp$.
 De plus $\dim \ker f = \dim E - \dim \text{Im } f = \dim \text{Im } f^\perp$ donc $\ker f = \text{Im } f^\perp$ puis la conclusion.

Exercice 14 : [énoncé]

Soit $y \in \text{Im } f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors

$$\forall z \in \ker f, (y | z) = (f(x) | z) = (x | f(z)) = (x | 0) = 0$$

donc $\text{Im } f \subset (\ker f)^\perp$ puis $\text{Im } f = (\ker f)^\perp$ par égalité des dimensions.

Exercice 15 : [énoncé]

Soient $x, y \in E$. On a

$$(f(x+y) | x+y) = 0$$

Or

$$(f(x+y) | x+y) = (f(x) | x) + (f(y) | y) + (f(x) | y) + (f(y) | x) = (f(x) | y) + (f(y) | x)$$

Si $x \in \ker f$ alors

$$\forall y \in E, (x | f(y)) = -(f(x) | y) = 0$$

donc $x \in (\text{Im } f)^\perp$. Ainsi

$$\ker f \subset (\text{Im } f)^\perp$$

De plus, par la formule du rang il y a égalité des dimensions et donc

$$\ker f = (\text{Im } f)^\perp$$

Exercice 16 : [énoncé]

- a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . $\text{tr } u = 0$ donne

$$\sum_{i=1}^n \langle e_i, u(e_i) \rangle = 0$$

Si $\dim E = 1$: ok

Si $\dim E > 1$, il existe $i \neq j$ tel que $\langle e_i, u(e_i) \rangle \geq 0$ et $\langle e_j, u(e_j) \rangle \leq 0$.

L'application $t \mapsto \langle u(te_i + (1-t)e_j), te_i + (1-t)e_j \rangle$ est continue, à valeurs réelles et change de signe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et donc il existe $t \in [0; 1]$ tel que pour $x = te_i + (1-t)e_j$, $\langle u(x), x \rangle = 0$. De plus, l'indépendance de e_i et e_j assure $x \neq 0$.

- b) Il existe ε_1 vecteur unitaire tel que

$$\langle \varepsilon_1, u(\varepsilon_1) \rangle = 0$$

On complète celui-ci en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A \end{pmatrix}$$

avec $\text{tr } A = 0$. Considérons alors u' l'endomorphisme de $E' = \text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de matrice A dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Puisque $\text{tr } u' = \text{tr } A = 0$, un principe de récurrence permet de former une base orthonormée $(\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ de E' dans laquelle u' est représenté par une matrice de diagonale nulle. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ est alors une base orthonormée solution du problème posé.

Exercice 17 : [énoncé]

Étudions le problème inverse, c'est-à-dire, étudions la liberté de la famille $(v_1, \dots, v_n)$.

Supposons $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$. On a alors

$$\langle v_i, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \rangle = c\lambda_1 + \dots + c\lambda_{i-1} + \lambda_i + c\lambda_{i+1} + \dots + c\lambda_n = 0$$

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (c) \\ & \ddots & \\ (c) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et la colonne $X = {}^t(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. Les équations précédentes fournissent le système

$$AX = 0$$

Si la matrice A est inversible alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est assurément libre. Inversement, si la famille A n'est pas inversible, il existe une relation linéaire sur ses colonnes

$$\mu_1 C_1 + \dots + \mu_n C_n = 0 \text{ avec } (\mu_1, \dots, \mu_n) \neq (0, \dots, 0)$$

Posons alors $u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$. On a

$$\forall 1 \leq i \leq n, \langle v_i, u \rangle = 0$$

et donc

$$u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \cap \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)^\perp = \{0_E\}$$

La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est alors liée.

Résumons : $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si, et seulement si, A est inversible.

Puisque

$$\det A = (1 + (n-1)c)(1-c)^{n-1}$$

on peut conclure que $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si, et seulement si,

$$c = 1 \text{ ou } c = -1/(n-1)$$

Exercice 18 : [énoncé]

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n 1^2 \right) = n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

Il y a égalité si, et seulement si, $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1, \dots, 1)$ sont colinéaires i.e. :

$$x_1 = \dots = x_n.$$

Exercice 19 : [énoncé]

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}} \sqrt{x_k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^n x_k$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des n -uplets

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \text{ et } (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$$

ce qui correspond au cas où

$$\frac{\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_1}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{1/\sqrt{x_n}}$$

soit encore

$$x_1 = \dots = x_n = 1/n$$

Exercice 20 : [énoncé]

Soit $g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ l'application définie par $g(t) = \sqrt{f(t)}$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b g(t) \cdot \frac{1}{g(t)} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t) dt \cdot \int_a^b \frac{dt}{f(t)} = \ell(f)$$

Il y a égalité si, et seulement si, $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{g(t)}$ sont colinéaires ce qui correspond à f constante.

Exercice 21 : [énoncé]

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^1 t^{n+p} f(t) dt \right)^2 = \left(\int_0^1 t^n \sqrt{f(t)} t^p \sqrt{f(t)} dt \right)^2 \leq \int_0^1 t^{2n} f(t) dt \int_0^1 t^{2p} f(t) dt$$

Exercice 22 : [énoncé]

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire par

$$(A | B) = \text{tr}({}^t A B)$$

Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(AB + BA) = 2(A | B)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la relation demandée.

Exercice 23 : [énoncé]

a) En notant $X = (x_1, \dots, x_n)$, on obtient

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

et donc

$${}^t X A X = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j|$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j| \right)^2}$$

et une nouvelle fois

$$\left(\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j| \right)^2 \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2$$

On obtient donc

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^n x_i^2$$

puis

$${}^t X A X > \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

b) Si $X \in \ker A$ alors ${}^t X A X = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède.

Exercice 24 : [énoncé]

($\Rightarrow$) Via Pythagore

($\Leftarrow$) Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ alors $2\lambda(x|y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0$.

Si, par l'absurde $(x|y) \neq 0$ alors $2\lambda(x|y) + \lambda^2 \|y\|^2 \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} 2\lambda(x|y)$ qui change de

signe en 0. Absurde.

Par suite $(x|y) = 0$.

Exercice 25 : [énoncé]

Soient x, y deux vecteurs unitaires de E .

Puisque

$$(x + y | x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux et donc $f(x + y)$ et $f(x - y)$ le sont aussi.

On a donc

$$\|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 = (f(x) + f(y) | f(x) - f(y)) = (f(x + y) | f(x - y)) = 0$$

On en déduit que les images par f des vecteurs unitaires de E ont tous la même norme. En posant λ cette valeur commune, on a

$$\forall u \in E, \|u\| = 1 \implies \|f(u)\| = \lambda$$

Pour $x \in E$ non nul, le vecteur $u = x/\|x\|$ est unitaire et donc

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \lambda$$

d'où l'on tire

$$\|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

relation qui reste valable quand $x = 0$.

Exercice 26 : [énoncé]

$F, G \subset F \cup G$ donc $(F \cup G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Pour tout $y \in F \cup G$, en discutant selon l'appartenance de y à F ou G , on a $(x|y) = 0$ donc $x \in (F \cup G)^\perp$. Ainsi $F^\perp \cap G^\perp \subset (F \cup G)^\perp$ puis l'égalité.

Exercice 27 : [énoncé]

a) Soient $f \in F$ et $g \in G$.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt = \int_{-1}^1 0 dt = 0$$

Les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux et donc $G \subset F^\perp$.

Inversement, soit $g \in F^\perp$.

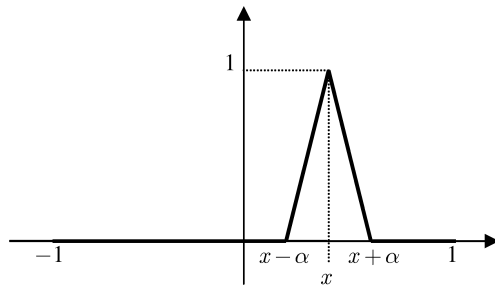
Montrons que, pour tout $x \in]0; 1[$, $g(x) = 0$.

Par l'absurde, supposons $g(x) \neq 0$ pour un $x \in]0; 1[$ et, quitte à considérer la fonction $-g$, supposons $g(x) > 0$. Par continuité de g , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$[x - \alpha; x + \alpha] \subset]0; 1[\text{ et } g(t) > 0 \text{ sur } [x - \alpha; x + \alpha]$$

Considérons alors la fonction f définie par le schéma. La fonction f appartient à F et la fonction produit fg est continue, positive mais n'est pas la fonction nulle donc

$$\int_{-1}^1 f(t)g(t) dt > 0$$

FIGURE 1 – La fonction f

C'est absurde car on a supposé $g \in F^\perp$.

On a donc pour tout $x \in]0; 1[$, $g(x) = 0$ puis par continuité, $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0; 1]$.

Ainsi $g \in G$ et finalement $F^\perp = G$.

- b) Si les sous-espaces vectoriels étaient supplémentaires alors toutes fonctions continues sur $[-1; 1]$ est somme d'une fonction de F et d'une fonction de G et est donc une fonction s'annulant en 0. C'est absurde.
Les sous-espaces vectoriels F et G ne sont donc pas supplémentaires.

Exercice 28 : [énoncé]

- a) $(E_{i,j} \mid E_{k,\ell}) = \text{tr}(E_{j,i}E_{k,\ell}) = \text{tr}(\delta_{i,k}E_{j,\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.
b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \mid B) = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB) = -\text{tr}(A^tB) = -\text{tr}({}^tBA) = -(B \mid A)$$

donc $(A \mid B) = 0$ et l'orthogonalité des espaces. Leur supplémentarité est connue.

- c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|(I_n \mid A)| \leq \|I_n\| \|A\|$$

d'où

$$\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$$

avec égalité si, et seulement si, $\text{tr}(A) \geq 0$ et (A, I_n) liée, i.e. $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \geq 0$.

Exercice 29 : [énoncé]

On obtient la famille (e_1, e_2, e_3) avec

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_2 = (0, 1, 0) \text{ et } e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 30 : [énoncé]

- a) cf. cours!

- b) Au terme des calculs, on obtient la base (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X \text{ et } P_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Exercice 31 : [énoncé]

Soit $n = i + j + k$ un vecteur normal à P . Notons p la projection orthogonale sur P .

On sait

$$\forall x \in E, p(x) = x - \frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}n$$

et donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 32 : [énoncé]

Soit $n = i - k$ un vecteur normal à P . Notons s la symétrie orthogonale par rapport à P . La relation

$$s(x) = x - 2 \frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}n$$

donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 : [énoncé]

a) Soient

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$$

et

$$K = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\}$$

On a $F = H \cap K$ puis $F^\perp = H^\perp + K^\perp$.

Soient $n = (1, 1, 1, 1)$ et $m = (1, -1, 1, -1)$ des vecteurs normaux à H et K .

Par Schmidt

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

forment une base orthonormée de $F^\perp$.

b) On peut facilement former $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp})$ car

$$\forall x \in E, p_{F^\perp}(x) = (x \mid e_1) e_1 + (x \mid e_2) e_2$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = I_4 - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $s_F = 2p_F - \text{Id}$ donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Pour $u = (1, 2, 3, 4)$, $p_F(u) = (-1, -1, 1, 1)$ donc

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\| = \sqrt{4 + 9 + 4 + 9} = \sqrt{26}$$

Exercice 34 : [énoncé]

Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$. On a $A^2 = A$ donc p est une projection.

En déterminant $\ker p$, on obtient $\ker p = \text{Vect}(a)$ avec $a = i + 2j - k$.

$\text{Im } p$ est un plan dont $p(i)$ et $p(j)$ forment une base.

Puisque $(p(i) \mid a) = (p(j) \mid a) = 0$ on a $\text{Im } p \subset (\ker p)^\perp$ puis $\text{Im } p = (\ker p)^\perp$ par égalité des dimensions.

p est donc la projection orthogonale sur le plan dont a est vecteur normal i.e.

$$P: x + 2y - z = 0$$

Exercice 35 : [énoncé]

Unicité : Si σ est une réflexion par rapport à un hyperplan H solution alors : $\sigma(a - b) = b - a$ et donc

$$H = \text{Vect}(b - a)^\perp$$

Existence : Soit $H = \text{Vect}(b - a)^\perp$ et σ la réflexion par rapport à H .

$\sigma(a - b) = b - a$ et $\sigma(a + b) = a + b$ car $(a + b \mid a - b) = 0$.

Donc

$$\sigma(a) = \frac{1}{2}\sigma(a + b) + \frac{1}{2}\sigma(a - b) = b \text{ et } \sigma(b) = a$$

La réflexion σ est solution.

Exercice 36 : [énoncé]

Unicité : $y = p_H(x)$ implique $y - x \in H^\perp$, or $y - x \neq 0$ donc $y - x$ est vecteur normal à H .

Ceci détermine H de manière unique.

Existence : Soit H l'hyperplan dont $y - x$ est vecteur normal.

Puisque $(x \mid y) = (y \mid y)$ on a $(x - y \mid y) = 0$ donc $y \in H$.

On a alors $x = y + (x - y)$ avec $y \in H$ et $x - y \in H^\perp$ donc $p_H(x) = y$ et H est solution.

Exercice 37 : [énoncé]

a) Rien à signaler.

b) On a

$$\forall f \in \mathcal{P} \text{ et } \forall g \in \mathcal{I}, \varphi(f, g) = 0$$

car le produit $t \mapsto f(t)g(t)$ est impair et intégré sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^\perp$.

Inversement, soit $h \in \mathcal{I}^\perp$. On sait $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$ donc on peut écrire $h = f + g$ avec $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$.

On a $\varphi(h, g) = \varphi(f, g) + \varphi(g, g)$. Or $\varphi(h, g) = 0$ et $\varphi(f, g) = 0$ donc

$\varphi(g, g) = 0$ d'où $g = 0$.

Ainsi $h = f \in \mathcal{P}$ puis $\mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{P}$. On conclut.

c) $\psi^2 = \text{Id}$ donc ψ est une symétrie.

$$\forall f \in \mathcal{P}, \psi(f) = f \text{ et } \forall f \in \mathcal{I} = (\mathcal{P})^\perp, \psi(f) = -f$$

donc ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 38 : [énoncé]

Soit n et n' des vecteurs normaux à H et H' .

Si s et s' commutent alors $s \circ s'(n) = s' \circ s(n) = -s'(n)$ donc $s'(n) \in H^\perp$.

Puisque $\|s'(n)\| = \|n\|$ on a $s'(n) = n$ ou $s'(n) = -n$ i.e. $n \in H'$ ou $n \in H'^\perp$.

Inversement :

Si $n \in H'$ alors on peut construire une base adaptée qui permet matriciellement de conclure à la commutativité et d'observer que $s \circ s'$ est la symétrie orthogonale par rapport à $H \cap H'$.

Si $n \in H'^\perp$ alors $H = H'$ et $s \circ s' = \text{Id}$.

Exercice 39 : [énoncé]

Le projeté orthogonal de x sur la droite $\text{Vect}(y)$ est

$$\frac{(y | x)}{\|y\|^2} y$$

Les projetés orthogonaux considérés seront donc égaux si, et seulement si,

$$\frac{(y | x)}{\|y\|^2} y = \frac{(x | y)}{\|x\|^2} x$$

Cette équation est vérifiée si, et seulement si, x et y sont orthogonaux ou

$$\|x\|^2 y = \|y\|^2 x$$

Dans ce dernier cas x et y sont colinéaires ce qui permet d'écrire $y = \lambda x$ et l'égalité donne

$$\lambda \|x\|^2 x = \lambda^2 \|x\|^2 x$$

d'où $\lambda = 1$.

Finalement, les projetés orthogonaux considérés seront égaux si, et seulement si, les vecteurs x et y sont égaux ou orthogonaux.

Exercice 40 : [énoncé]

Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales, c'est donc une matrice orthogonale.

En développant selon une rangée $\det M = -1$.

Puisque la matrice M est de surcroît symétrique, c'est une matrice de réflexion par rapport à un plan. Ce plan est celui de vecteur normal ${}^t(1, 1, 1)$.

Exercice 41 : [énoncé]

a) Si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ alors le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul et par conséquent

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La famille (P_0, P_1, P_2) est donc libre. Elle n'est pas orthogonale puisque $(P_0 | P_2) = 1/3 \neq 0$.

b) $R_0 = P_0$, $\|R_0\| = 1$, $Q_0: x \mapsto 1$

$$(P_0 | P_1) = 0, R_1 = P_1, \|R_1\| = 1/\sqrt{3}, Q_1: x \mapsto \sqrt{3}x.$$

$$R_2 = P_2 + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1.$$

$$(R_2 | R_0) = 0 \text{ donne } \lambda_0 = -(P_2 | P_0) = -1/3,$$

$$(R_2 | R_1) = 0 \text{ donne } \lambda_1/3 = -(P_2 | R_1) = 0.$$

$$R_2: x \mapsto x^2 - 1/3, \|R_2\| = \frac{2}{3\sqrt{5}}, Q_2: x \mapsto \frac{\sqrt{5}}{2} (3x^2 - 1).$$

c) Le projeté orthogonal de P_3 sur F est

$$R = (Q_0 | P_3) Q_0 + (Q_1 | P_3) Q_1 + (Q_2 | P_3) Q_2$$

soit, après calculs

$$R: x \mapsto \frac{3}{5}x$$

La distance de P_3 à F est alors

$$d = \|P_3 - R\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}$$

Exercice 42 : [énoncé]

a) Sans difficulté, notamment parce qu'un polynôme de degré ≤ 2 possédant trois racines est nécessairement nul.

b) $d(X^2, P) = \|X^2 - \pi\|$ avec $\pi = aX + b$ projeté orthogonal de X^2 sur P .
 $(X^2 - \pi | 1) = (X^2 - \pi | X) = 0$ donne le système

$$\begin{cases} 3a + 3b = 5 \\ 5a + 3b = 9 \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

et après calcul

$$d = \sqrt{2/3}$$

Exercice 43 : [énoncé]

Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geq 2$.

La quantité cherchée est $m = d(M, \text{Vect}(I, J)) = \|M - p(M)\|$ avec p la projection orthogonale sur $\text{Vect}(I, J)$.

$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) | I) = (M | I) = \text{tr}(M)$ et $(p(M) | J) = (M | J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M .

La résolution de ce système donne

$$a = \frac{n \text{tr}(M) - \sigma}{n(n-1)} \text{ et } b = \frac{\sigma - \text{tr}(M)}{n(n-1)}$$

donc

$$m^2 = \|M - p(M)\|^2 = (M - p(M) | M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1) \text{tr}(M)^2 + (\text{tr}(M) - \sigma)^2}{n(n-1)}$$

Exercice 44 : [énoncé]

En introduisant la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\|A\| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

on peut interpréter l'infimum calculé

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right) = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

La distance introduite se calcule par projection orthogonale. Sachant $A = M + N$ avec

$$M = \frac{A + {}^t A}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N = \frac{A - {}^t A}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$$

on obtient

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|N\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

Exercice 45 : [énoncé]

a) $(A | B) = \text{tr}(A^t B)$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A | B) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$$

b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(A | B) = \text{tr}(A^t B) = -\text{tr}(AB) \text{ et } (A | B) = (B | A) = \text{tr}({}^t AB) = \text{tr}(AB)$$

On en déduit $(A | B) = 0$.

Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.

Puisqu'on peut écrire pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M = \frac{1}{2} (M + {}^t M) + \frac{1}{2} (M - {}^t M)$$

avec $\frac{1}{2} (M + {}^t M) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2} (M - {}^t M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ i.e.

$$d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \|M - {}^t M\| = 2$$

c) H est le noyau de la forme linéaire non nulle trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice I_n est orthogonale à tout élément de H et c'est donc un vecteur normal à l'hyperplan H .

On en déduit

$$d(H, J) = \frac{|(I_n | J)|}{\|I_n\|} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Exercice 46 : [énoncé]

a) On reconnaît une restriction du produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0; 1]$.

b) La distance f_2 à g sera minimale quand g est le projeté orthogonal de f_2 sur $\text{Vect}(f_1, f_3)$.

Ce projeté g vérifie $(f_2 - g | f_1) = (f_2 - g | f_3) = 0$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = e - 1 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $a = 18 - 6e$ et $b = 4e - 10$.

Exercice 47 : [énoncé]

a) Symétrie, bilinéarité et positivité : ok

Si $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)

$$\forall t \in [-1; 1], P(t) = 0$$

Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

b) On a

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt = d(X^3, F)^2$$

où $F = \text{Vect}(1, X, X^2)$.

Soit P le projeté orthogonal de X^3 sur F . On peut écrire $P = a + bX + cX^2$ et on a par orthogonalité

$$(X^3 - P \mid 1) = (X^3 - P \mid X) = (X^3 - P \mid X^2) = 0$$

On en déduit que $P = \frac{3}{5}X$ puis

$$d(X^3, F)^2 = \frac{8}{175}$$

Exercice 48 : [énoncé]

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit un produit scalaire par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

La quantité cherchée m apparaît alors sous la forme

$$m = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \|X^2 - (aX^2 + bX + c)\|^2$$

C'est donc le carré de la distance de X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. En introduisant la projection orthogonale p sur ce sous-espace vectoriel

$$m = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - p(X^3)\|^2$$

On peut écrire

$$p(X^3) = a + bX + cX^2$$

Pour chaque $i = 0, 1, 2$, on a

$$(p(X^3) \mid X^i) = (X^3 \mid X^i)$$

car

$$(p(X^3) - X^3 \mid X^i) = 0$$

On obtient alors un système d'équations d'inconnue (a, b, c)

$$\begin{cases} a + b/2 + c/3 = 1/4 \\ a/2 + b/3 + c/4 = 1/5 \\ a/3 + b/4 + c/5 = 1/6 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$a = 1/20, b = -3/5 \text{ et } c = 3/2$$

On en déduit

$$m = \|X^3 - p(X^3)\|^2 = (X^3 - p(X^3) \mid X^3) = \frac{1}{2800}$$

Exercice 49 : [énoncé]

a) Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors les colonnes de $G(x_1, \dots, x_n)$ le sont selon la même relation.

b) $(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$ avec $M = (a_{i,j})$ donc $G(x_1, \dots, x_n) = {}^t M M$. Par suite $\det(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \det(M)^2 > 0$ car M inversible puisque $(x_1, \dots, x_n)$ libre.

c) $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$. On a $d(x, F) = \|n\|$.

En exprimant la première colonne du déterminant comme somme de deux colonnes :

$$\det G(u + n, x_1, \dots, x_n) = \det G(u, x_1, \dots, x_n) + \begin{vmatrix} \|n\|^2 & * \\ 0 & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix}$$

or $\det G(u, x_1, \dots, x_n) = 0$ car la famille est liée et

$$\begin{vmatrix} \|n\|^2 & * \\ 0 & G(x_1, \dots, x_n) \end{vmatrix} = \|n\|^2 \det G(x_1, \dots, x_n)$$

On en déduit

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}}$$

Exercice 50 : [énoncé]

- a) Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$ et on observe alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$ en notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de la matrice $G(u_1, \dots, u_p)$.
On conclut $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$.
- b) Si $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$ alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$ et on obtient alors que le vecteur $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ est orthogonal à tout u_j , c'est donc un vecteur commun à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et à son orthogonal, c'est le vecteur nul.
On conclut que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.
- c) $x = u + n$ avec $u \in F$ et $n \in F^\perp$. En développant $\det G(e_1, \dots, e_p, x)$ selon la dernière colonne :

$$\det G(e_1, \dots, e_p, u + n) = \det G(e_1, \dots, e_p, u) + \begin{vmatrix} G(e_1, \dots, e_p) & 0 \\ * & \|n\|^2 \end{vmatrix}$$

or $\det G(e_1, \dots, e_p, u) = 0$ car la famille est liée et donc

$$\det G(e_1, \dots, e_p, x) = \|n\|^2 \det G(e_1, \dots, e_p)$$

avec $\|n\| = d(x, F)$.

Exercice 51 : [énoncé]

- a) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B) = -\text{tr}(AB) \text{ et } \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle = \text{tr}({}^t AB) = \text{tr}(AB)$$

On en déduit $\langle A, B \rangle = 0$.

Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.

Puisqu'on peut écrire pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M = \frac{1}{2} (M + {}^t M) + \frac{1}{2} (M - {}^t M)$$

avec $\frac{1}{2} (M + {}^t M) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2} (M - {}^t M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

- b) La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ i.e.

$$d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \|M - {}^t M\| = 2$$

- c) H est le noyau de la forme linéaire non nulle trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice I_n est orthogonale à tout élément de H et c'est donc un vecteur normal à l'hyperplan H .

On en déduit

$$d(H, J) = \frac{|\langle I_n, J \rangle|}{\|I_n\|} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Exercice 52 : [énoncé]

($\Rightarrow$) Il suffit de prendre $x = y$

($\Leftarrow$) Par polarisation, pour tout $x, y \in E$,

$$(f(x) | f(y)) = \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)$$

Or $f(x) + f(y) = f(x + y)$ et donc

$$(f(x) | f(y)) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = (x | y)$$

Exercice 53 : [énoncé]

Soit $y \in f(F^\perp)$. Il existe $x \in F^\perp$ tel que $y = f(x)$. On a alors

$$\forall z \in F, (y | z) = (f(x) | f(z)) = (x | z) = 0$$

Par suite $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

De plus, f conserve les dimensions car c'est un automorphisme. Il y a donc égalité.

Exercice 54 : [énoncé]

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = \|f(\lambda x)\|^2 - 2\lambda(f(\lambda x) | f(x)) + \lambda^2 \|f(x)\|^2$$

or $\|f(\lambda x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$, $(f(\lambda x) | f(x)) = \lambda(x | x)$ et $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ donc

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 = 0$$

Ainsi

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Soient $x, y \in E$,

$$\|f(x+y) - (f(x) + f(y))\|^2 = \|f(x+y)\|^2 - 2(f(x+y) | f(x) + f(y)) + \|f(x) + f(y)\|^2$$

or $\|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$,

$$(f(x+y) | f(x) + f(y)) = (f(x+y) | f(x)) + (f(x+y) | f(y)) \\ = (x+y | x+y)$$

et

$$\|f(x) + f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + 2(f(x) | f(y)) + \|f(y)\|^2 \\ = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2$$

donc

$$\|f(x+y) - (f(x) + f(y))\|^2 = 0$$

et ainsi

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Finalement, f est linéaire. En fait, f apparaît une isométrie vectorielle.

Exercice 55 : [énoncé]

f étant un automorphisme, $\dim f(F) = \dim F$ donc $f(F) = F$.

Soit $y \in f(F^\perp)$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in F^\perp$.

Soit $v \in F$ on peut écrire $v = f(u)$ avec $u \in F$.

On a alors

$$(y | v) = (f(x) | f(u)) = (x | u) = 0$$

Ainsi $f(F^\perp) \subset F^\perp$, puis par égalité des dimensions $f(F^\perp) = F^\perp$.

Exercice 56 : [énoncé]

a) Soient $z = g(a) \in \text{Im } g$ et $y \in \ker g$. On a $f(y) = y$ donc

$$(z | y) = (g(a) | y) = (f(a) - a | y) = (f(a) | y) - (a | y) = (f(a) | f(y)) - (a | y) = 0$$

Ainsi $\text{Im } g \subset \ker g^\perp$ puis par égalité des dimensions $\text{Im } g = \ker g^\perp$.

b) Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y = p(x)$ et $z \in \text{Im } g$.

$$(p_n - p)(x) = p_n(z) = \frac{1}{n}(\text{Id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (f - \text{Id})(a) = \frac{1}{n}(f^n(a) - a)$$

Or $\|f^{n+1}(a)\| = \|a\|$ donc

$$\|(p_n - p)(x)\| \leq \frac{2\|a\|}{n} \rightarrow 0$$

Exercice 57 : [énoncé]

f étant un automorphisme, $\dim f(F) = \dim F$ et $\dim f(F^\perp) = \dim F^\perp$. Par suite

$$\dim f(F^\perp) = \dim f(F)^\perp$$

Soient $x \in f(F^\perp)$ et $y \in f(F)$. On peut écrire $x = f(a)$ et $y = f(b)$ avec $a \in F^\perp$ et $b \in F$. On a

$$(x | y) = (f(a) | f(b)) = (a | b) = 0$$

donc $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$ puis l'égalité par les dimensions.

Exercice 58 : [énoncé]

a) On a

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta} = f_\beta \circ f_\alpha$$

b) Par récurrence

$$f_\alpha^p = f_{(\alpha+1)^p-1}$$

c) Si $\alpha = -1$ alors $f_\alpha(a) = 0$.

f_{-1} est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(a)^\perp$.

Si $\alpha \neq -1$ alors $g = f_{-\alpha/(\alpha+1)}$ satisfait à la propriété $f_\alpha \circ g = g \circ f_\alpha = \text{Id}$ donc f_α inversible.

d) Si $\alpha = 0$ alors $f_\alpha = \text{Id}$.

Si $\alpha = -2$ alors f_α est la réflexion par rapport à $\text{Vect}(a)^\perp$.

Dans les deux cas $f_\alpha \in \mathcal{O}(E)$.

Si $\alpha \neq 0, -2$ alors $f_\alpha(a) = (1 + \alpha).a$ puis

$$\|f_\alpha(a)\| = |1 + \alpha| \neq 1 = \|a\|$$

et donc $f_\alpha \notin \mathcal{O}(E)$.

Exercice 59 : [énoncé]

f transforme une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ en une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (f(x) | e'_i) e'_i = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e'_i$$

d'où la linéarité de f .

Exercice 60 : [énoncé]

Puisque $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, on a

$$(I + 2M)/3 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

avec $M = A^{-1}B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ unitaire,

$$\|x + 2Mx\| = 3$$

Mais aussi

$$\|x\| + \|2Mx\| = \|x\| + 2\|x\| = 3$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et, par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$2Mx = \lambda x$$

En considérant à nouveau la norme, on obtient $\lambda = 2$ puis $Mx = x$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on conclut $M = I_n$ puis $A = B$.

Exercice 61 : [énoncé]

Les matrices diagonales avec coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1 . Le résultat s'obtient en étendant les colonnes de la première à la dernière, en exploitant qu'elles sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Exercice 62 : [énoncé]

a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n 1^2} = \sqrt{n}$$

donc $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

b) Pour $X = {}^t(1 \dots 1)$, on vérifie $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = {}^tXAX$. Or ${}^tXAX = (X | AX)$ donc toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|{}^tXAX| \leq \|X\| \|AX\|$. Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $|\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}| \leq n$.

c) On peut avoir l'égalité si $n = 1$ mais aussi si $n = 4$ avec

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En fait, un approfondissement du problème donne $\sqrt{n} \in 2\mathbb{Z}$ condition nécessaire à l'obtention de l'égalité.

Exercice 63 : [énoncé]

Pour $X = {}^t(1 \dots 1)$, on vérifie

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = {}^tXAX$$

Or ${}^tXAX = (X | AX)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|{}^tXAX| \leq \|X\| \|AX\|$$

Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$$

Exercice 64 : [énoncé]

a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases}$$

Puisque $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\sigma$, on obtient

$$M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1$$

- b) On suppose la matrice M orthogonale et l'on calcule son déterminant. En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

puis en retranchant les premières lignes aux suivantes

$$\det M = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$

Enfin

$$\det M = (a+b+c)((a-b)(a-c) + (b-c)^2)$$

Ainsi

$$\det M = S(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = S$$

car $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $\sigma = 0$.

Finalement

$$M \in \text{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1$$

- c) Les nombres a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si, et seulement si,

$$X^3 - X^2 + k = (X-a)(X-b)(X-c)$$

En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à la satisfaction du système

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ca=0 \\ abc=-k \end{cases}$$

De plus, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles si, et seulement si, $k \in [0; 4/27]$. En effet, considérons la fonction $f: x \mapsto x^3 - x^2 + k$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x(3x-2)$.

Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0) \geq 0$ et $f(2/3) \leq 0$.

Cela fournit les conditions $k \geq 0$ et $k \leq 4/27$.

Inversement, si $k \in [0; 4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)

Ainsi, si $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0; 4/27]$.

Inversement, si $k \in [0; 4/27]$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines a, b, c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 65 : [énoncé]

Introduisons

$$N = \begin{pmatrix} {}^tA & O_{p,n-p} \\ {}^tB & I \end{pmatrix}$$

On a

$$MN = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & B \\ C^tA + D^tB & D \end{pmatrix}$$

Or

$$M^tM = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & A^tC + B^tD \\ C^tA + D^tB & C^tC + D^tD \end{pmatrix} = I_n$$

donc

$$MN = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{n-p,p} & D \end{pmatrix}$$

En passant cette relation au déterminant, on en déduit

$$\det M \times \det {}^tA = \det D$$

Sachant $\det M = \pm 1$, la conclusion est dès lors facile.

Exercice 66 : [énoncé]

A est une matrice de rotation si, et seulement si, $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$ ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} p^2 + q^2 + r^2 = 1 \\ pq + qr + rp = 0 \\ p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 1 \end{cases}$$

(le déterminant se calculant par Sarrus).

Posons $\sigma_1 = p + q + r$, $\sigma_2 = pq + qr + rp$, $\sigma_3 = pqr$, $S_2 = p^2 + q^2 + r^2$, $S_3 = p^3 + q^3 + r^3$ et $t = p^2q + pq^2 + q^2r + qr^2 + t^2p + tp^2$

Si (p, q, r) est solution du système alors $\sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_1$ donne $\sigma_1 = \pm 1$.

De plus $\sigma_1\sigma_2 = 0$ donne $t + 3\sigma_3 = 0$ et donc

$$\sigma_1 = \sigma_1^3 = S_3 + 3t + 6\sigma_3 = S_3 - 3\sigma_3 = 1.$$

Ainsi p, q, r sont les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + a$.

Inversement, on vérifie que les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 + a$ satisfont le système.

Il ne reste plus qu'à étudier à quelle condition sur a ces trois racines sont réelles.

L'étude des variations de P donne la condition nécessaire et suffisante suivante

$$P(0) \geq 0 \text{ et } P(2/3) \leq 0$$

i.e. $a \in [0; 4/27]$.

La rotation alors obtenue est d'axe dirigé et orienté par $(1, 1, 1)$ et d'angle θ avec $\cos \theta = \frac{3p-1}{2}$ et $\sin \theta$ du signe de $q - r$.

Exercice 67 : [énoncé]

On a

$$\Omega^t \Omega = {}^t A^{-1} A^t A A^{-1}$$

Or A et ${}^t A$ commutent donc

$$\Omega^t \Omega = {}^t A^{-1} {}^t A A A^{-1} = I_n$$

Exercice 68 : [énoncé]

Il existe une seule rotation (et non deux) qui envoie u sur v , celle d'angle (u, v) .

Reste à déterminer les réflexions qui échangent u et v . Soit s une telle réflexion.

Si $u = v$ alors s est la réflexion par rapport à $\text{Vect}(u)$.

Si $u \neq v$ alors s est la réflexion par rapport à $\text{Vect}(u - v)^\perp$.

Exercice 69 : [énoncé]

Posons $r = \text{Rot}_\theta$ et $s = \sigma_D$.

$(s \circ r \circ s) \circ r = (s \circ r)^2 = \text{Id}$ car $s \circ r \in O^-(E)$ et c'est donc une réflexion.

Par suite $s \circ r \circ s = r^{-1} = \text{Rot}_{-\theta}$.

$s \circ (r \circ s \circ r) = (s \circ r)^2 = \text{Id}$ donc $r \circ s \circ r = s^{-1} = s$.

Exercice 70 : [énoncé]

Si $\sigma \circ r = r \circ \sigma$ alors $r = \sigma \circ r \circ \sigma$ or $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$ donc $r = r^{-1}$. Ainsi, si σ et r commutent alors $r = \text{Id}$ ou $r = \text{Rot}_\pi$. La réciproque est immédiate.

Exercice 71 : [énoncé]

Notons v' le projeté de v sur un plan P contenant u et w .

Orientons P , de sorte que $(u, w) = \theta \pmod{2\pi}$.

Notons $\alpha' = \text{Ecart}(u, v')$ et $\beta' = \text{Ecart}(v', w)$.

$(u | v) = \|u\| \|v\| \cos \alpha$ et $(u | v) = (u | v') = \|u\| \|v'\| \cos \alpha'$ avec $\|v'\| \leq \|v\|$ donc $\cos \alpha \leq \cos \alpha'$ puis $\alpha' \leq \alpha$.

De même $\beta' \leq \beta$.

Par des considérations d'angles orienté :

$\theta = \alpha' + \beta', \alpha' - \beta', -\alpha' + \beta', -\alpha' - \beta' \pmod{2\pi}$.

Si $\theta = \alpha' + \beta' \pmod{2\pi}$ alors $\theta = \alpha' + \beta'$ et $\theta \leq \alpha + \beta$.

Si $\theta = \alpha' - \beta' \pmod{2\pi}$ alors $\theta = \alpha' - \beta' \leq \alpha' \leq \alpha + \beta$.

Si $\theta = -\alpha' + \beta' \pmod{2\pi}$: idem.

Si $\theta = -\alpha' - \beta' \pmod{2\pi}$ alors $\theta = 2\pi - \alpha' - \beta'$ et $\alpha + \beta \geq \alpha' + \beta' \geq \pi \geq \theta$.