

Calcul asymptotique

Comparaison de suites numériques

Exercice 1 [02280] [Correction]

Classer par ordre de négligeabilité les suites dont les termes généraux suivent :

$$\text{a) } \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln n} \quad \text{b) } n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln n, \frac{n^2}{\ln n}$$

Exercice 2 [02281] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{(n+3 \ln n)e^{-(n+1)}} \quad \text{b) } u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \quad \text{c) } u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{[3]n^2-n+1}}$$

Exercice 3 [00236] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

$$\text{a) } u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2} \quad \text{b) } u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2 + 1} \quad \text{c) } u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$$

Exercice 4 [02282] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{b) } u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} \quad \text{c) } u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}}$$

Exercice 5 [00235] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes :

$$\text{a) } u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{b) } u_n = \ln \left(\sin \frac{1}{n} \right) \quad \text{c) } u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$$

Exercice 6 [01472] [Correction]

Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

$$\text{a) } 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \quad \text{b) } \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt{[n+1]n+1} - \sqrt{[n]n}}{\sqrt{[n]n}}$$

Exercice 7 [02287] [Correction]

Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

- a) Montrer que (u_n) converge vers 0^+ .
b) Donner un équivalent simple de (u_n) .

Exercice 8 [02286] [Correction]

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$ des suites de réels strictement positifs telles que

$$u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim t_n$$

Montrer que

$$u_n + w_n \sim v_n + t_n$$

Exercice 9 [02284] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = 0! + 1! + 2! + \cdots + n! = \sum_{k=0}^n k!$$

Montrer que $u_n \sim n!$.

Exercice 10 [02285] [Correction]

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

- a) Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- b) Déterminer la limite de (S_n) .

- c) On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.
 d) Donner un équivalent simple de (S_n) .

Exercice 11 [00301] [\[Correction\]](#)

On étudie ici la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- a) Établir que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$ et en déduire

$$\ln(1+t) \geq \frac{t}{t+1}$$

- b) Observer que

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$$

et en déduire un équivalent simple de S_n .

- c) Montrer que la suite $u_n = S_n - \ln n$ est convergente. Sa limite est appelée constante d'Euler et est usuellement notée γ .

Exercice 12 [02459] [\[Correction\]](#)

Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

Calcul de limites de suites numériques

Exercice 13 [02283] [\[Correction\]](#)

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

- a) $u_n = n \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2+1} \right)}$ b) $u_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n} \right)^n$
 c) $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 14 [01473] [\[Correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes :

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left((n+1)^{1/n} - n^{1/n} \right)$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

Exercice 15 [02782] [\[Correction\]](#)

Soient des réels positifs a et b . Trouver la limite de

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$$

Exercice 16 [01474] [\[Correction\]](#)

Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}a + \sqrt[n]{n}b}{2} \right)^n$$

Exercice 17 [01475] [\[Correction\]](#)

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3\sqrt[n]{n}2 - 2\sqrt[n]{n}3 \right)^n$$

Calcul de développements asymptotiques de suites

Exercice 18 [01459] [\[Correction\]](#)

Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée :

- a) $u_n = \ln(n+1)$ à la précision $1/n^2$
 b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ à la précision $1/n^2$
 c) $u_n = \sqrt{n} + \sqrt{n} - \sqrt{n}$ à la précision $1/n$
 d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ à la précision $1/n^2$.

Exercice 19 [00323] [\[Correction\]](#)

Développement asymptotique à trois termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}$$

Exercice 20 [01476] [\[Correction\]](#)

Former le développement asymptotique, en $+\infty$, à la précision $1/n^2$ de

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$$

Exercice 21 [02788] [\[Correction\]](#)

Donner un développement asymptotique de $\left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!\right)_{n \in \mathbb{N}}$ à la précision $o(n^{-3})$.

Etude asymptotique de suites de solutions d'une équation

Exercice 22 [02289] [\[Correction\]](#)

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n .
- Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
- Donner un équivalent simple de la suite (x_n) .

Exercice 23 [01477] [\[Correction\]](#)

Soit $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln x + x$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = n$.
- Former le développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à la précision $(\ln n)/n$.

Exercice 24 [00310] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$x + \sqrt{[3]x} = n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que cette équation possède une unique solution x_n .
- Déterminer la limite de x_n puis un équivalent simple de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 25 [00311] [\[Correction\]](#)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + e^x = n$$

possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

- Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n .
- Former un développement asymptotique à trois termes de x_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 26 [01478] [\[Correction\]](#)

Montrer que l'équation $\tan x = \sqrt{x}$ possède une unique solution x_n dans chaque intervalle $I_n =]-\pi/2; \pi/2[+ n\pi$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

Réaliser un développement asymptotique à quatre termes de x_n .

Exercice 27 [02599] [\[Correction\]](#)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation

$$(E_n): x^n + x - 1 = 0$$

- Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) notée x_n et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.
- On pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que, pour n assez grand,

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2 \frac{\ln n}{n}$$

(on posera $f_n(y) = n \ln(1 - y) - \ln(y)$).

- Montrer que $\ln(y_n) \sim -\ln n$ puis que

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 28 [00316] [\[Correction\]](#)

Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geq 1$. On la note x_n . Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 29 [00317] [Correction]

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) : $x^n = x + 1$ dont l'inconnue est $x \geq 0$.

- Montrer l'existence et l'unicité de x_n solution de (E_n) .
- Montrer que (x_n) tend vers 1.
- Montrer que (x_n) admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

Exercice 30 [00318] [Correction]

Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1$$

- Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n .
- Déterminer la limite de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n .

Exercice 31 [00312] [Correction]

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + \ln x = 0$ possède une unique solution $x_n > 0$.
- Déterminer la limite de x_n .
- On pose $u_n = 1 - x_n$. Justifier que $nu_n \sim -\ln u_n$ puis déterminer un équivalent de u_n .

Exercice 32 [03154] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on introduit le polynôme

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n)$$

- Montrer que le polynôme P'_n possède une unique racine dans l'intervalle $]0; 1[$; celle-ci sera noté x_n .
- Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
- Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P'_n}{P_n}$$

- En déduire un équivalent de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 33 [02471] [Correction]

Soit $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ et $(\mathcal{C})$ le graphe de f .

- Montrer l'existence d'une suite (x_n) vérifiant :
- (x_n) est croissante positive.
 - la tangente à $(\mathcal{C})$ en $(x_n, f(x_n))$ passe par O .
- Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de (x_n) .

Exercice 34 [04139] [Correction]

On étudie l'équation $\tan x = x$ d'inconnue x réelle.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette équation possède une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n =]-\pi/2; \pi/2[+ n\pi$.
- Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie.
- Réaliser un développement asymptotique à trois termes de x_n .

Etude asymptotique de suites récurrentes

Exercice 35 [02302] [Correction]

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$

- Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Montrer que $u_n \leq n$ puis que $u_n = o(n)$.
- Donner un équivalent simple de (u_n) .
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Comparaison de fonctions numériques

Exercice 36 [01821] [Correction]

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow +\infty$:

a) $\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt{[3]x^2+3}}$ b) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$ c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

Exercice 37 [00306] [Correction]Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow +\infty$

a) $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1$ c) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$
 b) $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$

Exercice 38 [01823] [Correction]Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow 0$

a) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ b) $\tan x - \sin x$ c) $e^x + x - 1$

Exercice 39 [00313] [Correction]Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand $x \rightarrow 0$

a) $\ln(1 + \sin x)$ c) $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2$
 b) $\ln(\ln(1+x))$

Exercice 40 [00305] [Correction]Déterminer un équivalent de $\ln(\cos x)$ quand $x \rightarrow (\pi/2)^-$ **Exercice 41** [01461] [Correction]

Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées au voisinage de 0 :

a) $x(2 + \cos x) - 3 \sin x$ b) $x^x - (\sin x)^x$ c) $\arctan(2x) - 2 \arctan(x)$

Exercice 42 [01824] [Correction]Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

- a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
 b) Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Calcul de limites de fonctions numériques**Exercice 43** [01822] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{x + \cos x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 44 [00704] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x}{x \ln x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x^2}{\ln(x+x^2)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

Exercice 45 [00705] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{\ln x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x}$

Exercice 46 [01462] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

Exercice 47 [01463] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$ c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$ avec $a > 0$

Exercice 48 [03381] [Correction]

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x)$$

Calcul de développements limités

Exercice 49 [01447] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(\pi/4)$ de $\sin x$
- b) $DL_4(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$
- c) $DL_5(0)$ de $\operatorname{sh} x \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch} x$.

Exercice 50 [00226] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
- b) $DL_3(0)$ de $\ln(1 + \sin x)$
- c) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Exercice 51 [00745] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(0)$ de $\ln(1 + e^x)$
- b) $DL_3(0)$ de $\ln(2 + \sin x)$
- c) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3 + \cos x}$

Exercice 52 [00292] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(0)$ de $e^{\sqrt{1+x}}$
- b) $DL_3(0)$ de $\ln(1 + \sqrt{1+x})$
- c) $DL_3(0)$ de $\ln(3e^x + e^{-x})$

Exercice 53 [01448] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$
- b) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
- c) $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$

Exercice 54 [01451] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
- b) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan x}{\tan x}$
- c) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln x}$

Exercice 55 [00751] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$
- b) $DL_2(0)$ de $\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$
- c) $DL_3(0)$ de $\frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}$

Exercice 56 [00231] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
- b) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3 + \cos x}$
- c) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$
- d) $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

Exercice 57 [01449] [\[Correction\]](#)

Former le $DL_3(1)$ de $\arctan x$

Exercice 58 [00232] [\[Correction\]](#)

Former le développement limité à l'ordre 3 quand $x \rightarrow 0$ de $\arctan(e^x)$.
Quelle à l'allure de cette fonction autour de ce point ?

Exercice 59 [01452] [\[Correction\]](#)

Déterminer les développements limités suivants :

- a) $DL_{10}(0)$ de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
- b) $DL_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

Exercice 60 [01453] [Correction]

Exprimer le développement limité à l'ordre n en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 61 [01454] [Correction]

Pour $\alpha = -1/2$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

à l'aide de nombres factoriels.

En déduire une expression du $DL_{2n+1}(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis du $DL_{2n+2}(0)$ de $\arcsin(x)$.

Exercice 62 [00233] [Correction]

Exprimer le développement limité général en 0 de $\arcsin x$.

Exercice 63 [01455] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le développement limité à l'ordre $2n+2$ de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

Exercice 64 [01456] [Correction]

Montrer que l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x e^{x^2}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et former le $DL_5(0)$ de f^{-1} .

Exercice 65 [03025] [Correction]

En calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $(e^x - 1)^n$, établir que pour tout $0 \leq \ell \leq n$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

Exercice 66 [02519] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- f admet-elle un développement limité en 0? si oui à quel ordre maximal?

Applications à l'étude locale de fonctions

Exercice 67 [01464] [Correction]

Soit $f:]-1; 0[\cup]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.

Quelle est alors la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point?

Exercice 68 [01465] [Correction]

Soient a un réel non nul et f la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$$

Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 69 [01466] [Correction]

Montrer que la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 70 [01470] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les $DL_n(0)$ sont nuls.

Exercice 71 [01471] [\[Correction\]](#)

Soit $f:]0; 1[\cup]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

- a) Montrer que f est convexe sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.
- b) Montrer que, pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t}$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \ln 2$. De même, établir : $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \ln 2$.

- c) On prolonge f par continuité en 1, en posant $f(1) = \ln 2$.
Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.
Établir la convexité de f sur $]0; +\infty[$.

Calcul de développements asymptotiques de fonctions

Exercice 72 [01457] [\[Correction\]](#)

Former le développement asymptotique en 0 de l'expression considérée à la précision demandée :

- a) $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ à la précision $x^{5/2}$
- b) x^x à la précision $(x \ln x)^2$

Exercice 73 [01458] [\[Correction\]](#)

Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée :

- a) $\sqrt{x+1}$ à la précision $1/x^{3/2}$.
- b) $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ à la précision $1/x^2$.
- c) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $1/x^2$.

Exercice 74 [03431] [\[Correction\]](#)

Former le développement asymptotique quand $x \rightarrow +\infty$ de $\arctan x$ à la précision $1/x^3$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a)

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{\ln n}{n^2} \ll \frac{1}{n \ln n} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln n}{n}$$

b)

$$\sqrt{n} \ln n \ll n \ll n \ln n \ll \frac{n^2}{\ln n} \ll n^2$$

Exercice 2 : [énoncé]

a) $u_n = \frac{ne^{-n}}{e} \rightarrow 0$

b) $u_n \sim \frac{2 \ln n}{n} \rightarrow 0$

c) $u_n \sim n^{1/3} \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 : [énoncé]

a) $u_n \sim -\frac{1}{2}n \rightarrow -\infty$

b) $u_n \sim 2n \rightarrow +\infty$

c) $u_n \sim \frac{n!}{3^n} \rightarrow +\infty$

Exercice 4 : [énoncé]

a)

$$u_n = \frac{2}{n^2 - 1} \sim \frac{2}{n^2}$$

b)

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c)

$$u_n = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ puisque $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Exercice 5 : [énoncé]

a) $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$.

b) $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0 \neq 1$ donc $u_n \sim \ln \frac{1}{n} = -\ln n$.

c) $u_n = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 6 : [énoncé]

a)

$$2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{4n\sqrt{n}}$$

b)

$$\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)} \sim \frac{1/n}{1/2n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

c) $\sqrt{[n+1]n+1} - \sqrt{[n]n} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}}$ or

$$e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^3 + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$

et

$$e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^3 + o\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right)$$

donc

$$\sqrt{[n+1]n+1} - \sqrt{[n]n} = -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 7 : [énoncé]

a) (u_n) est décroissante donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Puisque $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0^+$, on a $\ell + \ell = 0$ donc $\ell = 0$.De plus, à partir d'un certain rang : $2u_n \geq u_n + u_{n+1} > 0$

b) Par monotonie

$$u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$$

avec $u_{n+1} + u_n \sim \frac{1}{n}$ et $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ donc $2u_n \sim \frac{1}{n}$ puis

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

Supposons $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. On a

$$\left| \frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1 \right| = \left| \frac{(u_n - v_n) + (w_n - t_n)}{v_n + t_n} \right|$$

donc

$$\left| \frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1 \right| \leq \frac{|u_n - v_n|}{v_n} + \frac{|w_n - t_n|}{t_n} = \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| + \left| \frac{w_n}{t_n} - 1 \right| \rightarrow 0$$

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!$$

Or

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

et

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-2} k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

donc

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! = n! + o(n!) \sim n!$$

Exercice 10 : [\[énoncé\]](#)

a)

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b)

$$S_n \geq \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2$$

puis $S_n \rightarrow +\infty$.

- c) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.
 Or $u_n = S_n - 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geq -2$ donc (u_n) est aussi minorée.
 Par suite (u_n) converge.

d)

$$S_n = 2\sqrt{n} + u_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}$$

Exercice 11 : [\[énoncé\]](#)

- a) On étudie la fonction $t \mapsto t - \ln(1+t)$ pour établir la première inégalité. On en déduit

$$\ln\left(1 - \frac{t}{1+t}\right) \leq -\frac{t}{1+t}$$

donc

$$\ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq -\frac{t}{1+t}$$

puis l'inégalité voulue.

b)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \ln(n+1)$$

et

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1/k}{1+1/k} \leq 1 + \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 1 + \ln n$$

On en déduit

$$S_n \sim \ln n$$

c)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1/n}{1+1/n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

donc (u_n) est décroissante. De plus $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$ donc (u_n) est minorée et par suite convergente.

Exercice 12 : [\[énoncé\]](#)

On peut calculer l'intégrale

$$u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$$

Or pour $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

Exercice 13 : [énoncé]

- a) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$ car $\frac{1}{n^2+1} \rightarrow 0$. Par suite $u_n \sim 1 \rightarrow 1$.
- b) $u_n = e^{n \ln(1 + \sin \frac{1}{n})}$, $\ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) \sim \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$ puis $u_n \rightarrow e$.
- c) $u_n = e^{\sqrt{n+1} \ln n - \sqrt{n} \ln(n+1)}$,
 $\sqrt{n+1} \ln n - \sqrt{n} \ln(n+1) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n - \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
Or $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}$ et
 $\sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$ donc
 $\sqrt{n+1} \ln n - \sqrt{n} \ln(n+1) = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$ donc $u_n \rightarrow 1$.

Exercice 14 : [énoncé]

- a) $n \sin \frac{1}{n} \sim \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$
- b) $(n \sin \frac{1}{n})^{n^2} = e^{n^2 \ln(n \sin \frac{1}{n})} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$.
- c) $n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = e^{\frac{\ln n}{n}} n^2(e^{\frac{\ln(1+1/n)}{n}} - 1) \sim e^{\frac{\ln n}{n}}$ donc
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = 1$

Exercice 15 : [énoncé]

Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors la suite converge évidemment vers 0. On suppose désormais $a, b > 0$.

Puisque

$$a^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln a} \text{ avec } \frac{1}{n} \ln a \rightarrow 0$$

on peut écrire

$$a^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} \ln a + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On procède de même pour $b^{1/n}$ et alors

$$\frac{1}{2} (a^{1/n} + b^{1/n}) = 1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

donne

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(ab) + o(1)\right)$$

Finalement

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n \rightarrow \sqrt{ab}$$

Exercice 16 : [énoncé]

On a

$$\frac{\sqrt[n]{n}a + \sqrt[n]{n}b}{2} = \frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} = \frac{e^{\frac{\ln a}{n}} + e^{\frac{\ln b}{n}}}{2} = 1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)$$

donc

$$\left(\frac{\sqrt[n]{n}a + \sqrt[n]{n}b}{2}\right)^n = e^{n(\ln(1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)))} = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2} + o(1)} \rightarrow \sqrt{ab}$$

Exercice 17 : [énoncé]

On a

$$3\sqrt[n]{n}2 - 2\sqrt[n]{n}3 = 3e^{\frac{1}{n} \ln 2} - 2e^{\frac{1}{n} \ln 3} = 1 + \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$(3\sqrt[n]{n}2 - 2\sqrt[n]{n}3)^n = e^{n \ln(3\sqrt[n]{n}2 - 2\sqrt[n]{n}3)} = e^{\ln(8/9) + o(1)} \rightarrow \frac{8}{9}$$

Exercice 18 : [énoncé]

- a) $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$.

c) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$

d) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

Exercice 19 : [énoncé]

Pour $x \in [0; 1]$,

$$\left| \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 \right| \leq \frac{1}{120}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leq \frac{1}{120} \sum_{k=1}^n \frac{k^5}{n^{10}} \leq \frac{1}{120} \frac{1}{n^4}$$

donc $M_n = o(1/n^3)$.

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 20 : [énoncé]

On a

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!}$$

Or

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{(n-4)!}{n!} \leq n \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!} \leq (n-4) \frac{(n-5)!}{n!} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 22 : [énoncé]

- Le tableau de variation de $f: x \mapsto x + \ln x$ permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. L'équation E_n possède alors pour solution unique $x_n = f^{-1}(n)$.
- Le tableau de variation de f^{-1} donne $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Par suite $x_n \rightarrow +\infty$.
- $x_n \rightarrow +\infty$ donne $\ln x_n = o(x_n)$. La relation $x_n + \ln x_n = n$ donne alors $x_n + o(x_n) = n$ et donc $x_n \sim n$.

Exercice 23 : [énoncé]

- La fonction $f: x \mapsto x + \ln x$ réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence de (x_n) .
- Comme $n \rightarrow +\infty$, $x_n = f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$. Par suite $\ln x_n = o(x_n)$ et $n = x_n + \ln x_n \sim x_n$.
Donc $x_n = n + o(n)$.
Soit $y_n = x_n - n$. On a :

$$y_n = -\ln x_n = -\ln(n + o(n)) = -\ln n + \ln(1 + o(1)) = -\ln n + o(1)$$

Donc

$$x_n = n - \ln n + o(1)$$

Soit $z_n = y_n + \ln n$. On a :

$$z_n = -\ln(n - \ln(n) + o(1)) + \ln n = -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Donc

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 24 : [énoncé]

a) La fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sqrt{[3]x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

b) Puisque $x_n = f^{-1}(n)$ et $f^{-1} \xrightarrow{+\infty} +\infty$, on a $x_n \rightarrow +\infty$.

On en déduit $\sqrt{[3]x_n} = o(x_n)$ puis

$$x_n \sim n$$

c) On peut écrire $x_n = n + y_n$ avec $y_n = o(n)$.

Puisque

$$y_n + \sqrt{[3]n} + y_n = 0$$

on a

$$y_n \sim -\sqrt{[3]n}$$

On peut écrire $y_n = -\sqrt{[3]n} + z_n$ avec $z_n = o(\sqrt{[3]n})$.

Puisque

$$-\sqrt{[3]n} + z_n + \sqrt{[3]n} \left[1 + \frac{1 - \sqrt{[3]n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt{[3]n}}{n}\right) \right] = 0$$

on obtient

$$z_n \sim \frac{1}{3\sqrt{[3]n}}$$

Finalement

$$x_n = n - \sqrt{[3]n} + \frac{1}{3\sqrt{[3]n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{[3]n}}\right)$$

Exercice 25 : [énoncé]

a) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) $f(x_n) = n \leq n+1 = f(x_{n+1})$ donc $x_n \leq x_{n+1}$ car f^{-1} est croissante. Si (x_n) est majorée par M alors $f(x_n) = n \leq f(M)$ ce qui est absurde. La suite (x_n) étant croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$. $x_n = o(e^{x_n})$ donc $e^{x_n} \sim n \rightarrow +\infty \neq 1$ puis $x_n \sim \ln n$.

c) Posons $y_n = x_n - \ln n = o(\ln n)$.

On a $y_n + \ln n + n e^{y_n} = n$ donc

$$e^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} + \frac{\ln n}{n} \rightarrow 1$$

d'où $y_n \rightarrow 0$ et

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n)$$

On a alors $y_n + \ln n + n(1 + y_n + o(y_n)) = n$ d'où $ny_n + o(ny_n) = -\ln n$ et

$$y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$$

Par suite

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

On écrit $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$ et

$$e^{y_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + z_n + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n} + z_n + nz_n + \frac{1}{2} \frac{(\ln n)^2}{n} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$$

puis

$$z_n \sim -\frac{(\ln n)^2}{2n^2}$$

Finalement

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)$$

Exercice 26 : [énoncé]

Sur I_n , la fonction $f: x \mapsto \tan x - \sqrt{x}$ est continue, croît strictement de $-\infty$ vers $+\infty$.

Cela assure l'existence et l'unicité de x_n .

On a

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

donc $x_n \sim n\pi$.

Posons $y_n = x_n - n\pi$. On a $\tan y_n = \sqrt{x_n}$ et $y_n \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc

$$y_n = \arctan \sqrt{x_n} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Posons

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{x_n} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x_n}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}}$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

donc

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi^3 n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Finalement

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + \frac{3+4\pi}{\pi^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Exercice 27 : [énoncé]

- a) On introduit $\varphi_n(x) = x^n + x - 1$. $\varphi'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$, φ_n est continue strictement croissante et réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $[-1; +\infty[$ d'où l'existence et l'unicité de x_n . On a $\varphi_n(1) = 1$ donc $x_n \in]0; 1[$. Si $x_{n+1} < x_n$ alors $x_{n+1}^{n+1} < x_n^n$ puis

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$$

ce qui est absurde. On en déduit que (x_n) est croissante et étant majorée cette suite converge. Posons ℓ sa limite, $\ell \in]0; 1]$. Si $\ell < 1$ alors

$x_n^n + x_n - 1 = 0$ donne à la limite $\ell - 1 = 0$ ce qui est absurde. Il reste $\ell = 1$.

- b) f_n est strictement décroissante sur $]0; 1[$, $f_n(y_n) = 0$,

$$f_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \sim \frac{\ln n}{2} > 0 \text{ et } f_n\left(\frac{2 \ln n}{n}\right) \sim -\ln n < 0$$

donc à partir d'un certain rang

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2 \frac{\ln n}{n}.$$

c)

$$\ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leq \ln y_n \leq \ln\left(2 \frac{\ln n}{n}\right)$$

donne $\ln(y_n) \sim -\ln n$ puis $n \ln(1 - y_n) = \ln y_n$ donne $-ny_n \sim -\ln n$ puis $y_n \sim \frac{\ln n}{n}$ et finalement

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 28 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$. L'étude de la fonction f_n assure l'existence et l'unicité d'une solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ à l'équation étudiée. De plus, on observe que $x_n \in [0; 1]$.

Puisque $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$, on peut affirmer $x_{n+1} \geq x_n$.

La suite (x_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ .

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0; 1]$, à la limite $\ell \in [0; 1]$.

Si $\ell < 1$ alors

$$0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$$

et la relation $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$ donne à la limite $\ell^2 = 1$ ce qui est absurde.

On conclut que $\ell = 1$.

Posons $u_n = 1 - x_n$,

On a

$$(1 - u_n)^n = u_n(2 - u_n)$$

donc

$$n \ln(1 - u_n) = \ln u_n + \ln(2 - u_n)$$

d'où

$$-nu_n \sim \ln u_n \text{ puis } \ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$$

or

$$\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$$

donc

$$\ln u_n \sim -\ln n$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

et enfin

$$x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}$$

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

a) Il suffit d'étudier $f_n : x \mapsto x^n - (x + 1)$.

b) $f_n(1) \leq 0$ donc $x_n \geq 1$. De plus

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (x_n + 1) = (x_n - 1)(x_n + 1) \geq 0$$

donc $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $\ell \geq 1$.

Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \geq \ell^n \rightarrow +\infty$ or $x_n^n = x_n + 1 \rightarrow \ell + 1$. Ce qui est impossible et il reste $\ell = 1$.

c) On a

$$x^n = x + 1 \iff n \ln x = \ln(x + 1) \iff g(x) = \frac{1}{n}$$

avec

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x + 1)}$$

définie sur $[1; +\infty[$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $g'(x) > 0$ donc g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[0; 1[$, de plus (puisque $g'(x) \neq 0$) g^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc g^{-1} admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$x_n = g^{-1}(1/n)$ admet un développement limité à tout ordre.

Formons ses trois premiers termes

$$g^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$

$a = g^{-1}(0) = 1$. $g(g^{-1}(x)) = x$ donc

$$\ln(1 + bx + cx^2 + o(x^2)) = x \ln(2 + bx + o(x^2))$$

puis

$$bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$b = \ln 2 \text{ et } c = \frac{(1 + \ln(2)) \ln(2)}{2}$$

Finalement

$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1 + \ln(2)) \ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

a) La fonction $x \mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $[0; 1]$ car

$$P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

est strictement négatif sauf pour $x = 1$.

La fonction continue P_n réalise donc une bijection strictement décroissante de $[0; 1]$ vers $[P_n(1); P_n(0)] = [2 - n; 1]$.

On en déduit l'existence et l'unicité de la solution x_n à l'équation $P_n(x) = 0$.

b) Puisque $x_n \in [0; 1]$, on a $x_n^{n+1} \leq x_n^n$ puis

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0$$

Ainsi $P_{n+1}(x_n) \leq P_{n+1}(x_{n+1})$ et donc $x_{n+1} \leq x_n$ car la fonction P_{n+1} est strictement décroissante.

La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0; 1]$.

Si $\ell > 0$ alors

$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \rightarrow -\infty$$

ce qui est absurde. On conclut $\ell = 0$.

c) On a

$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \rightarrow 0$$

et donc $x_n^n = o(nx_n)$.

Sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $nx_n \sim 1$ puis

$$x_n \sim \frac{1}{n}$$

Écrivons ensuite

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \rightarrow 0$$

Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a

$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \geq 0$$

Nous allons montrer

$$(1 + \varepsilon_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ce qui permettra de déterminer un équivalent de ε_n puis de conclure.

Puisque $\varepsilon_n \rightarrow 0$, pour n assez grand, on a $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$ et alors

$$\varepsilon_n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \leq \frac{2^n}{n^n}$$

On en déduit

$$1 \leq (1 + \varepsilon_n)^n \leq \left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)\right)$$

Or

$$n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0$$

et par encadrement

$$(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1$$

On peut conclure $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$ et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

Exercice 31 : [énoncé]

a) Soit $f_n: x \mapsto x^n + \ln x$. On a

x	0	1	$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

d'où l'existence et l'unicité de x_n avec en plus la propriété $x_n \in]0; 1[$.

b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \ln(x_n) = (1 - x_n) \ln(x_n) < 0$$

donc $x_{n+1} \geq x_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell \in]0; 1]$.

Si $\ell < 1$ alors

$$0 = x_n^n + \ln x_n \rightarrow -\ln \ell$$

car $0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$.

Ceci est impossible. Il reste $\ell = 1$.

c) $(1 - u_n)^n = -\ln(1 - u_n) \sim u_n \rightarrow 0 \neq 1$

donc $n \ln(1 - u_n) \sim \ln u_n$ puis $nu_n \sim -\ln u_n \rightarrow +\infty \neq 1$.

$\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$ donc $\ln n = -\ln u_n + \ln(-\ln u_n) + o(\ln(-\ln u_n))$ or $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$ donc $\ln n \sim -\ln u_n$ puis

$$u_n \sim -\frac{\ln u_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 32 : [énoncé]

a) Par application du théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto P_n(t)$ sur chacun des intervalles $[k; k+1]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on obtient que le polynôme P'_n admet au moins une racine dans chacun des intervalles $]k; k+1[$. Puisque le polynôme P'_n est de degré n , il possède au plus n racines et donc il ne possède pas d'autres racines que celles précédentes. En particulier, le polynôme P'_n possède exactement une racine dans l'intervalle $]0; 1[$.

b) On a

$$P_{n+1}(X) = P_n(X)(X - (n+1))$$

En dérivant et en évaluant en x_n on obtient

$$P'_{n+1}(x_n) = P_n(x_n)$$

D'une part

$$(-1)^n P_n(x_n) = x_n \prod_{k=1}^n (k - x_n)$$

est une quantité positive.

D'autre part, l'expression

$$(-1)^n P_{n+1}(x) = x(x-1) \prod_{k=2}^{n+1} (k-x)$$

est négative sur $[0; 1]$. On en déduit ses variations sur $[0; 1]$ puis le signe de sa dérivée sur ce même intervalle. Puisque qu'elle est négative sur $[0; x_{n+1}]$ et positive sur $[x_{n+1}; 1]$, on obtient

$$x_{n+1} \leq x_n$$

La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

c) Puisque les racines de P_n sont exactement les $0, 1, \dots, n$ et puisque celles-ci sont simples, on obtient

$$F_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{X-k}$$

d) Sachant $F_n(x_n) = 0$, on obtient

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque $0 \leq x_n \leq x_0 \leq 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x_n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_0} \leq \frac{1}{1-x_0} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1}$$

Ainsi

$$\ln n + O(1) \leq \frac{1}{x_n} \leq \ln(n-1) + O(1)$$

et on peut conclure

$$x_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

Exercice 33 : [énoncé]

a) La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ avec

$$I_k =]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, la tangente en $(x, f(x))$ passe par O si, et seulement si, $xf'(x) = f(x)$.

Après transformation, ceci équivaut pour $x > 0$ à l'équation

$$x \tan x + \ln(\cos(x)) + x = 0$$

Posons $\varphi(x) = x \tan x + \ln(\cos(x)) + x$.

φ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.

$\varphi'(x) = x(1 + \tan^2 x) + 1 > 0$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+^*$.

Quand $x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-$, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$. Quand $x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^+$, $\varphi(x) \rightarrow -\infty$.

$\varphi|_{I_k}$ réalise donc une bijection de I_k vers $\mathbb{R}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$).

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $x_n = (\varphi|_{I_n})^{-1}(0)$ est solution.

b) Evidemment $x_n \sim 2n\pi$ et donc $x_n = 2n\pi + y_n$.

Après calculs, on obtient

$$(2n\pi + y_n)(\cos y_n + \sin y_n) = -\cos(y_n) \ln(\cos y_n)$$

La fonction $t \mapsto t \ln t$ est bornée sur $]0; 1]$ car prolongeable par continuité en 0 et donc

$$\cos y_n + \sin y_n = -\frac{\cos y_n \ln(\cos y_n)}{2n\pi + y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Sachant $|y_n| < \pi/2$, on en déduit $y_n \rightarrow -\pi/4$.

On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 34 : [énoncé]

a) Sur I_n , la fonction $f_n: x \mapsto \tan x - x$ est continue et croît strictement de $-\infty$ vers $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de I_n vers $\mathbb{R}$. L'équation $f_n(x) = 0$ possède alors une unique solution dans I_n .

b) Puisque x_n est un élément de I_n , on dispose de l'encadrement

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

On en déduit

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$$

c) Posons

$$y_n = x_n - n\pi$$

On a

$$\tan y_n = x_n \text{ avec } y_n \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

et donc

$$y_n = \arctan x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

On peut ainsi déjà écrire le développement asymptotique à deux termes

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$$

Déterminons un équivalent de ce $o(1)$ en étudiant

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan x_n$$

Sachant

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

on obtient

$$z_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$$

Finalement

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 35 : [\[énoncé\]](#)

- a) $u_n \geq \sqrt{n} \rightarrow +\infty$.
 b) $u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n}$.
 c) Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq n$.
 Pour $n = 1$: ok
 Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n} \underset{HR}{\leq} \sqrt{(n+1) + n} \leq n+1$$

Récurrence établie.

$$0 \leq u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \sqrt{n + (n-1)} = O(\sqrt{n})$$

donc $u_n = O(\sqrt{n}) = o(n)$.

- d) $u_n = \sqrt{n + o(n)} \sim \sqrt{n}$
 e)

$$u_n - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

or $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ et $u_n + \sqrt{n} = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$ donc

$$u_n - \sqrt{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Exercice 36 : [\[énoncé\]](#)

- a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt{[3]x^2+3}} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} = x^{5/6}$$

- b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$

- c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{x + o(x) + x + o(x)} \sim \frac{1}{x}$$

Exercice 37 : [\[énoncé\]](#)

- a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{x \ln x}$$

- b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)}}$$

Or

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1} \sim \frac{2}{x}$$

et

$$\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)} = 2\sqrt{\ln x} + o(\sqrt{\ln x}) \sim 2\sqrt{\ln x}$$

donc

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \sim \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

- c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln x = 1 + o(1) - \ln x \sim -\ln x$$

Exercice 38 : [\[énoncé\]](#)

- a) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim \frac{2x^2}{2} = x^2$$

- b) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) = 2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{2}$$

- c) Quand $x \rightarrow 0$,

$$e^x - 1 \sim x$$

donc

$$e^x + x - 1 = x + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x$$

Exercice 39 : [énoncé]a) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$$

car $\sin x \rightarrow 0$, or

$$\sin x \sim x$$

donc

$$\ln(1 + \sin x) \sim x$$

b) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1 + x) \sim x \rightarrow 0 \neq 1$$

donc

$$\ln(\ln(1 + x)) \sim \ln(x)$$

c) Quand $x \rightarrow 0$,

$$\ln(1 + x)^2 - \ln(1 - x)^2 = (\ln(1 + x) + \ln(1 - x))(\ln(1 + x) - \ln(1 - x))$$

or

$$\ln(1 + x) + \ln(1 - x) = \ln(1 - x^2) \sim -x^2$$

et

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x)$$

donc

$$(\ln(1 + x))^2 - (\ln(1 - x))^2 \sim -2x^3$$

Exercice 40 : [énoncé]Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, posons $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h \rightarrow 0^+$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \sin h$$

Or

$$\sin h \sim h \rightarrow 0 \neq 1$$

donc

$$\ln \sin h \sim \ln h$$

puis

$$\ln \cos x \sim \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Exercice 41 : [énoncé]

Par développements limités :

$$a) \quad x(2 + \cos x) - 3 \sin x \sim \frac{1}{60}x^5$$

$$b) \quad x^x - (\sin x)^x = x^x \left(1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right) \sim \frac{1}{6}x^3$$

$$c) \quad \arctan(2x) - 2 \arctan(x) \sim -2x^3$$

Exercice 42 : [énoncé]a) f est décroissante donc possède une limite ℓ en $+\infty$.Quand $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow \ell$ et $f(x+1) \rightarrow \ell$ donc

$$f(x) + f(x+1) \rightarrow 2\ell$$

or

$$f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

donc $\ell = 0$.b) Quand $x \rightarrow +\infty$, on a

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$$

donc

$$2f(x) \sim \frac{1}{x}$$

puis

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

Exercice 43 : [énoncé]a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} \sim \frac{x^2}{x} = x \rightarrow +\infty$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x \ln x - x}{x + \cos x} \sim \frac{x \ln x}{x} = \ln x \rightarrow +\infty$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} \sim \sqrt{x}e^{-x/2} \rightarrow 0$$

Exercice 44 : [énoncé]a) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{x + \sin x}{x \ln x} = \frac{x + x + o(x)}{x \ln x} \sim \frac{2}{\ln x} \rightarrow 0$$

b) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\ln x + x^2 = \ln x + o(\ln x)$$

et puisque

$$x + x^2 \sim x \rightarrow 0 \neq 1$$

on a

$$\ln(x + x^2) \sim \ln x$$

donc

$$\frac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1 \rightarrow 1$$

c) Quand $x \rightarrow 1$, on peut écrire $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$,

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln(1+h)}{2h+h^2} \sim \frac{h}{2h} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Exercice 45 : [énoncé]a) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x^{\ln x}}{\ln x} = e^{(\ln x)^2 - \ln \ln x} = e^{(\ln x)^2 + o(\ln x)^2} \rightarrow +\infty$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x} \ln x - \frac{\ln x}{x} \ln \ln x} = e^{\frac{(\ln x)^2}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)} \rightarrow 1$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \frac{\ln(2x + o(x))}{\ln x} \sim \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} \sim 1 \rightarrow 1$$

Exercice 46 : [énoncé]a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

Exercice 47 : [énoncé]

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} = \frac{1}{3} 6^{4/13} 5^{5/26}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x} = e$$

$$\text{c) } x^a - a^x \sim a^a(1 - \ln a)(x - a) \text{ si } a \neq 1 \text{ et } \arctan(x) - \arctan(a) \sim (\arctan(a))'(x - a) = \frac{(x-a)}{1+a^2}.$$

Si $a \neq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = a^a(1 + a^2)(1 - \ln a)$$

Si $a = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = 2$$

Exercice 48 : [énoncé]Posons $x = 1 - h$.Quand $x \rightarrow 1^-$, on a $h \rightarrow 0^+$ et

$$\ln(x) \ln(1 - x) = \ln(1 - h) \ln h \sim -h \ln h \rightarrow 0$$

Exercice 49 : [énoncé]

$$\text{a) } \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3)$$

$$\text{b) } \frac{\ln x}{x^2} = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + \frac{13}{3}(x - 1)^3 - \frac{77}{12}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4).$$

$$\text{c) } \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch} x = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 50 : [énoncé]

$$\text{a) } \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{b) } \ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$\text{c) } \cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3).$$

Exercice 51 : [énoncé]

- a) $\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
 b) $\ln(2 + \sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$
 c) $\sqrt{3 + \cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

Exercice 52 : [énoncé]

- a) $e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{e}{2}x + \frac{e}{48}x^3 + o(x^3)$.
 b) $\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$
 c) $\ln(3e^x + e^{-x}) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

Exercice 53 : [énoncé]

- a) $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$
 b) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$
 c) $\ln\left(\frac{\sinh x}{x}\right) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

Exercice 54 : [énoncé]

- a) $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$
 b) $\frac{\arctan x}{\tan x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$
 c) $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

Exercice 55 : [énoncé]

- a) $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$
 b) $\frac{\sin x}{\exp(x)-1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$
 c) $\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$

Exercice 56 : [énoncé]

- a) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
 b) $\sqrt{3 + \cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
 c) $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$
 d) $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$

Exercice 57 : [énoncé]

On primitive de $DL_2(1)$ de $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Exercice 58 : [énoncé]

On procède par intégration du développement limité de la fonction dérivée :

$$\frac{d}{dx}(\arctan(e^x)) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+x^2+o(x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

En intégrant

$$\arctan(e^x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \pi/4 + x/2$. Puisque le terme qui suit dans le développement limité change de signe, la courbe traverse cette tangente : il s'agit d'un point d'inflexion.

Exercice 59 : [énoncé]

- a) $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^9)$ dont $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{24}t^9 + o(t^{10})$
 puis
 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$
 b) $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) =$
 $\ln(e^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}e^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + o(x^{1000}).$

Exercice 60 : [énoncé]

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} (-x)^k + o(x^n)$$

avec

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{k} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} x^k + o(x^n)$$

Exercice 61 : [énoncé]

On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdots \frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (2k+1) (k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 62 : [énoncé]

On a

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^{2k} + o(x^{2n})$$

avec

$$c_k = \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \frac{3}{2} \cdots \frac{2k-1}{2}}{k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

donc

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Exercice 63 : [énoncé]

$$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ et } \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

Donc $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$

Exercice 64 : [énoncé]

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$$

de plus $\lim_{+\infty} f = +\infty, \lim_{-\infty} f = -\infty.$

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier f^{-1} admet une $DL_5(0)$, de plus comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi et le $DL_5(0)$ de f^{-1} est de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$$

En réalisant un $DL_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ on obtient :

$$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{2}a + 3b + c\right)x^5 + o(x^5)$$

Or $f^{-1}(f(x)) = x$, donc :

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = \frac{5}{2}$$

Exercice 65 : [énoncé]

D'une part $e^x - 1 = x + o(x)$ donne

$$(e^x - 1)^n = x^n + o(x^n)$$

D'autre part

$$(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kx}$$

or

$$e^{kx} = \sum_{\ell=0}^n \frac{k^\ell}{\ell!} x^\ell + o(x^n)$$

donc, en réordonnant les sommes

$$(e^x - 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} k^\ell}{\ell!} x^\ell + o(x^n)$$

L'unicité des développements limités entraîne la relation proposée.

Exercice 66 : [énoncé]

- a) f est évidemment dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
- b) f admet pour développement limité à l'ordre $n - 1$: $f(x) = o(x^{n-1})$.
Si f admet un $DL_n(0)$ celui-ci serait de la forme

$$f(x) = ax^n + o(x^n)$$

ce qui entraîne que $\sin(1/x)$ admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

Exercice 67 : [énoncé]

On a

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

Par suite f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = -\frac{1}{2}$.

De plus ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$.

L'équation de la tangente en 0 est $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$ et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

Exercice 68 : [énoncé]

On a

$$f(x) = ax - a(1 + \frac{1}{2}a)x^2 + a(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a^2)x^3 + o(x^3)$$

Pour que f présente un point d'inflexion en 0, il faut que $a(1 + \frac{1}{2}a) = 0$ i.e. : $a = -2$.

Inversement si $a = -2$,

$$f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

et par suite f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice 69 : [énoncé]

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -1/2$ et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 70 : [énoncé]

f est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Montrons par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $f^{(n)}$ est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$$

pour $x \neq 0$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

Pour $n = 0$: ok.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$f^{(n)}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P'_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

avec $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.

Récurrence établie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \underset{y=1/x^2}{=} P_n(\sqrt{y})e^{-y} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ et de même quand $x \rightarrow 0^-$.

Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$ dans une version généralisée, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Exercice 71 : [énoncé]

- a) Soit G une primitive de la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ sur $]0; 1[$ (resp. sur $]1; +\infty[$).
Pour tout $x \in]0; 1[$ (resp. $]1; +\infty[$), on a $f(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; 1[$ (resp. sur $]1; +\infty[$) et

$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

On a alors

$$f''(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$

Soit $g(x) = x \ln x - x + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g'(x) = \ln(x)$. Puisque $g(1) = 0$, la fonction g est positive puis $f'' \geq 0$ sur $]0; 1[$ (resp. $]1; +\infty[$).

- b) Pour $x > 1$,

$$\forall t \in [x; x^2], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x \, dt}{t \cdot \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \, dt}{t \cdot \ln t}$$

Comme $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \cdot \ln t} = \ln 2$, on obtient

$$x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$$

puis $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \ln 2$.

Pour $x < 1$,

$$\forall t \in [x^2; x], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2 \, dt}{t \cdot \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x \, dt}{t \cdot \ln t}$$

On obtient $x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$ puis $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \ln 2$.

c) f est continue sur $]0; +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ et

$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$$

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on a f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(1) = 1$.

De même, en exploitant

$$f''(1+h) = \frac{(1+h) \ln(1+h) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2} \sim \frac{h^2/2}{(1+h)h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f''(1) = 1/2$.

Comme f'' est positive sur $]0; +\infty[$, on peut conclure que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 72 : [énoncé]

$$a) \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2})$$

$$b) x^x = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)$$

Exercice 73 : [énoncé]

$$a) \sqrt{x+1} = \sqrt{x} \sqrt{1+1/x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

$$b) x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$c) \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2} \frac{1}{x} + \frac{11e}{24} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Exercice 74 : [énoncé]

On a pour $x > 0$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$$

donc

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$