

Calculs algébriques

Equations et systèmes

Exercice 1 [02116] [Correction]

Observer que

$$x = \sqrt{[3]20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt{[3]20 - 14\sqrt{2}}$$

est solution d'une équation de la forme $x^3 = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Résoudre cette dernière et déterminer x .

Exercice 2 [02117] [Correction]

Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 [02118] [Correction]

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 4 [02119] [Correction]

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.

Exercice 5 [02115] [Correction]

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = 2x - 1 & [1] & \text{b)} } 3x = 2 - x \quad [\pi] \\ \text{c)} } nx = 0 & [\pi] \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*) \end{array}$$

Sommes

Exercice 6 [02062] [Correction]

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

$$\begin{array}{l} \text{a)} \sum_{i=1}^n \alpha + a_i = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i \\ \text{b)} \sum_{i=1}^n a_i + b_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \\ \text{c)} \sum_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i \\ \text{d)} \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \\ \text{e)} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^\alpha \\ \text{f)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} ? \end{array}$$

Exercice 7 [02063] [Correction]

Établir l'une des trois formules suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} & \text{b)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{c)} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{array}$$

Exercice 8 [02064] [Correction]

À partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$, calculer :

$$\begin{array}{l} \text{a)} \sum_{k=1}^n k(k+1) \\ \text{b)} 1.n + 2.(n-1) + \dots + (n-1).2 + n.1. \end{array}$$

Exercice 9 [02065] [Correction]

Calculer

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k$$

Exercice 10 [02066] [Correction]

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ est strictement croissante.

Exercice 11 [02067] [\[Correction\]](#)

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$$

Exercice 12 [02068] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 13 [02069] [\[Correction\]](#)

a) Calculer

$$\sum_{k=1}^p k k!$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \llbracket 0, (p+1)! - 1 \rrbracket$, il existe un uplet $(n_0, n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, 0 \leq n_k \leq k \text{ et } n = \sum_{k=0}^p n_k k!$$

c) Justifier l'unicité d'une telle suite.

Sommes géométriques**Exercice 14** [02070] [\[Correction\]](#)Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$.**Exercice 15** [02071] [\[Correction\]](#)Calculer, pour tout $q \in \mathbb{C}$, la somme $\sum_{k=0}^n q^{2k}$.**Exercice 16** [02072] [\[Correction\]](#)Pour $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k q^k$.
En calculant $qS_n - S_n$, déterminer la valeur de S_n .**Exercice 17** [02053] [\[Correction\]](#)Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, lorsqu'elle a un sens, l'équation :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$$

Sommes doubles**Exercice 18** [02073] [\[Correction\]](#)À partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$, calculer :

- a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$ c) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$
 b) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

Exercice 19 [02074] [\[Correction\]](#)Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $C_n = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q)$ en remarquant

$$\sum_{1 \leq p, q \leq n} p + q = 2C_n + 2 \sum_{p=1}^n p$$

Produits**Exercice 20** [02075] [\[Correction\]](#)

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

- a) $\prod_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \prod_{i=1}^n a_i$ b) $\prod_{i=1}^n a_i b_i = \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_i$ c) $\prod_{i=1}^n a_i + b_i = \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i$?

Exercice 21 [02076] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 22 [02077] [\[Correction\]](#)On désire calculer le produit $P(x) = \prod_{0 \leq k \leq n} \cos(2^k x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- a) Commencer par traiter le cas $x = 0$ $[\pi]$.

b) Pour $x \neq 0$ $[\pi]$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et exprimer $P(x)$.

Exercice 23 [02078] [\[Correction\]](#)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$P = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k})$$

- Calculer P quand $a = 1$.
- Calculer $(1 - a)P$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P .
- Comment expliquer la formule obtenue ?

Exercice 24 [03498] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$$

Nombres factoriels

Exercice 25 [02079] [\[Correction\]](#)

Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ puis $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factoriels

Exercice 26 [02080] [\[Correction\]](#)

Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n (n+k)$$

Formule du binôme

Exercice 27 [02082] [\[Correction\]](#)

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } S_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \text{b) } S_1 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad \text{c) } S_2 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 28 [02083] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$A = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} \text{ et } B = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$$

en formant un système dont A et B seraient solutions.

Exercice 29 [02084] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} j^p$$

En déduire

$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}, B = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} \text{ et } C = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2}$$

Exercice 30 [02085] [\[Correction\]](#)

[Formule de Chu-Vandermonde] Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p + q$.

En développant de deux manières $(1+x)^p \times (1+x)^q$, établir

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Exercice 31 [02088] [\[Correction\]](#)

Développer $(a+b+c)^n$.

Exercice 32 [02089] [\[Correction\]](#)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

b) Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} \text{ et } \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

c) Soit (x_n) une suite de réels. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} x_\ell$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Coefficients binomiaux

Exercice 33 [02081] [\[Correction\]](#)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$$

Exercice 34 [02086] [\[Correction\]](#)

Calculer, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k}$$

Exercice 35 [02087] [\[Correction\]](#)

Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, la somme

$$\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right)$$

Exercice 36 [02090] [\[Correction\]](#)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 37 [02091] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 38 [03682] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

a) On suppose que n est premier. Montrer

$$\forall k \in \{2, \dots, n-1\}, n \text{ divise } \binom{n}{k}$$

b) Inversement, on suppose que n est composé. Montrer

$$\exists k \in \{2, \dots, n-1\}, n \text{ ne divise pas } \binom{n}{k}$$

Exercice 39 [03688] [\[Correction\]](#)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier

$$\forall 1 \leq k \leq n, \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

b) En déduire que pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

et pour tout entier k vérifiant $n/2 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$$

c) Comment interpréter simplement les inégalités qui viennent d'être obtenues ?

Exercice 40 [03689] [\[Correction\]](#)

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

On remarque

$$x^3 = 6x + 40$$

4 est solution apparente de cette équation.

$$x^3 - 6x - 40 = (x - 4)(x^2 + 4x + 10)$$

Les solutions de l'équation sont $4, -2 + i\sqrt{6}, -2 - i\sqrt{6}$. Le nombre x correspond à la seule solution réelle donc $x = 4$.

Exercice 2 : [énoncé]

- a) Si (x, y) est solution alors $(2) \implies x(x + y) = 0$ donc $x = 0$ ou $y = -x$.
 Si $x = 0$ alors (1) donne $y = \pm 1/\sqrt{2}$.
 Si $y = -x$ alors (1) donne $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
 Inversement : ok
 Finalement : $\mathcal{S} = \{(0, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$.
- b) Si (x, y) est solution alors $(1) - (2)$ donne $(x - y)^2 = 0$ d'où $x = y$ puis (1) donne $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}$.
- c) Si (x, y) est solution alors (1) et (2) donnent $x^4 = x$ d'où $x = 0$ ou $x = 1$.
 Si $x = 0$ alors $y = 0$. Si $x = 1$ alors $y = 1$.
 Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Exercice 3 : [énoncé]

- a) Si (x, y, z) est solution alors (3) donne $x = 0, y = 0$ ou $z = 0$.
 Si $x = 0$ alors $y = 3, z = 5$. Si $y = 0$ alors $x = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}$. Si $z = 0$ alors $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}$.
 Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \{(0, 3, 5), (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)\}$.
- b) $\mathcal{S} = \{(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9})\}$.
- c) $\mathcal{S} = \{(\frac{5}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8})\}$.

Exercice 4 : [énoncé]

On a

$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a + 1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ ay + az = 1 \\ ay + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ ay + az = 1 \\ (1 - a)z = 0 \end{cases}$$

Si $a = 1$ alors le système a pour solution les triplets

$$(3 - 2z, 1 - z, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

Si $a \neq 1$ alors le système équivaut à

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ay = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, il n'y a pas de solutions.

Si $a \neq 0, 1$ alors le système possède pour solution l'unique le triplet

$$(3, 1/a, 0)$$

Exercice 5 : [énoncé]

- a) $x = 2x - 1 \quad [1] \iff -x = -1 \quad [1] \iff x = 1 \quad [1], \mathcal{S} = \mathbb{Z}$.
- b) $3x = 2 - x \quad [\pi] \iff 4x = 2 \quad [\pi] \iff x = \frac{1}{2} \quad [\frac{\pi}{4}], \mathcal{S} = \{\frac{k\pi+2}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- c) $nx = 0 \quad [\pi] \iff x = 0 \quad [\frac{\pi}{n}], \mathcal{S} = \{\frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 6 : [énoncé]

b) c) f)

Exercice 7 : [énoncé]

Chacune des formules peut être acquise en raisonnant par récurrence.

Exercice 8 : [énoncé]

a) En séparant la somme

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b) On réécrit

$$1.n + 2.(n-1) + \dots + (n-1).2 + n.1 = \sum_{k=1}^n k(n+1-k)$$

et on réorganise

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Exercice 9 : [énoncé]

D'une part

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k = \sum_{\ell=1}^p (-(2\ell-1) + 2\ell) = p$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k k = p - (2p+1) = -(p+1)$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^n (n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 10 : [énoncé]

En étant attentif à l'expression de la somme associée à u_{n+1} , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0. \end{aligned}$$

Exercice 11 : [énoncé]

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, sachant

$$(n+1)! + (n+1)! = 2.(n+1)! \leq (n+2)!$$

Exercice 12 : [énoncé]

En écrivant au numérateur $k = (k+1) - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Exercice 13 : [énoncé]

a) En écrivant $k = (k+1) - 1$

$$\sum_{k=1}^p k k! = \sum_{k=1}^p (k+1)! - k! = (p+1)! - 1$$

b) Par récurrence forte sur $p \geq 0$.

Pour $p = 0$: ok

Supposons la propriété établie jusqu'au rang $p \geq 0$.

Soit $n \in \llbracket 0, (p+2)! - 1 \rrbracket$.

Réalisons la division euclidienne de n par $(p+1)!$: $n = q(p+1)! + r$ avec $0 \leq r < (p+1)!$.

Puisque $0 \leq n < (p+2)!$ on a $0 \leq q \leq p+1$.

Par hypothèse de récurrence, on peut écrire $r = \sum_{k=0}^p n_k k!$ et en prenant $n_{p+1} = q$ on a $n = \sum_{k=0}^{p+1} n_k k!$.

Récurrence établie.

c) Supposons $n = \sum_{k=0}^p n_k k! = \sum_{k=0}^p n'_k k!$ avec les conditions requises.

Si $n_p < n'_p$ alors

$$\sum_{k=0}^p n_k k! \leq n_p p! + \sum_{k=0}^{p-1} k.k! = (n_p + 1)p! - 1 < n'_p p! \leq \sum_{k=0}^p n'_k k!$$

Ceci est absurde donc nécessairement $n_p \geq n'_p$ puis par symétrie $n_p = n'_p$.
On simplifie alors le terme $n_p p!$ et on reprend le principe pour conclure à l'unicité.

Exercice 14 : [énoncé]

Si $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ alors

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

(somme géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$)

Si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ alors

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n 1 = n+1.$$

Exercice 15 : [énoncé]

Si $q^2 \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^n q^{2k} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$ (somme géométrique de raison q^2)

Si $q^2 = 1$ alors $\sum_{k=0}^n q^{2k} = n+1$.

Exercice 16 : [énoncé]

On a

$$qS_n - S_n = \sum_{k=0}^n kq^{k+1} - \sum_{k=0}^n kq^k = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)q^k - \sum_{k=0}^n kq^k$$

En combinant les deux sommes

$$qS_n - S_n = nq^{n+1} - \sum_{k=1}^n q^k = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{q-1}$$

puis

$$S_n = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2}$$

Exercice 17 : [énoncé]

L'équation a un sens pour $x \neq \pi/2 \pmod{\pi}$. En exploitant $\cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{ikx})$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} \right)$$

ce qui apparaît comme une somme géométrique.

Si $x \neq 0 \pmod{\pi}$ alors $q = \frac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^n \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}}$$

Il reste à en déterminer la partie réelle. Puisque

$$\sum_{k=0}^n \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x}{-i \sin x}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x (\cos x)^n}$$

Finalement, pour les x considérés

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x} = 0 \iff \sin(n+1)x = 0 \iff x = 0 \pmod{\pi/(n+1)}$$

Si $x = 0 \pmod{\pi}$ alors x n'est pas solution car

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = n+1$$

Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{k\pi}{(n+1)} \mid k \in \mathbb{Z} \text{ et } (n+1) \nmid k \right\}$$

Exercice 18 : [énoncé]

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 + 2ij + j^2)$ puis

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = n \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij + n \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

b) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n ij = \sum_{i=1}^{n-1} \left(i \sum_{j=i+1}^n j \right)$ puis

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{n+i+1}{2} (n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}$$

c) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right)$ puis

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 19 : [énoncé]

Après réorganisation des termes

$$\sum_{1 \leq p, q \leq n} p + q = 2C_n + 2 \sum_{p=1}^n p$$

Or

$$2 \sum_{p=1}^n p = n(n+1)$$

et

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n p + q = n^2(n+1)$$

d'où

$$C_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

Exercice 20 : [énoncé]

b)

Exercice 21 : [énoncé]

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1$$

Exercice 22 : [énoncé]a) Si $x = 0 \quad [2\pi]$ alors $P(x) = 1$. Si $x = \pi \quad [2\pi]$ alors $P(x) = -1$.b) En exploitant successivement la formule $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$

$$\sin(x)P(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdots \cos 2^n x = \frac{1}{2^{n+1}} \sin 2^{n+1} x$$

donc

$$P(x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)}$$

Exercice 23 : [énoncé]a) Si $a = 1$ alors

$$P = \prod_{k=0}^n 2 = 2^{n+1}$$

b) Si $a \neq 1$ alors

$$(1-a)P = (1-a)(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$$

Par application de la formule $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ on obtient

$$(1-a)P = (1-a^2)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$$

et en répétant l'opération

$$(1-a)P = (1-a^{2^{n+1}})$$

On conclut

$$P = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

c) La formule obtenue correspond à celle exprimant la somme

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2^n - 1}$$

En effet si l'on développe le produit définissant P , on obtient que P est la somme des termes

$$a^{\sum_{i=0}^n \varepsilon_i 2^i} \text{ avec } \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

Or tout entier k compris entre 0 et $2^{n+1} - 1$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$k = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i 2^i \text{ avec } \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$$

et donc

$$P = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2^n - 1}$$

Exercice 24 : [énoncé]Pour $n \geq 2$, on a

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1) \times \cdots \times 5}{(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1}$$

puis après simplification

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1} = \frac{(2n+3)(2n+1)}{3}$$

et pour $n = 1$

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1} = 5$$

ce qui rend la formule précédente encore valable.

Exercice 25 : [énoncé]

En extrayant un 2 dans chaque facteur

$$2.4.6 \times \dots \times (2n) = 2^n 1.2.3 \times \dots \times n = 2^n n!$$

En introduisant les facteurs pairs intermédiaires

$$1.3.5 \times \dots \times (2n+1) = \frac{1.2.3.4.5.6 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}{2.4.6 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 26 : [énoncé]

(1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Pour $n = 1$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$\prod_{k=1}^{n+1} (4k-2) = \prod_{k=1}^n (4k-2) \times (4n+2) \stackrel{HR}{=} \prod_{k=1}^n (n+k) \times (4n+2)$$

et

$$\prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) = (n+2)(n+3) \dots (2n+2) = \prod_{k=1}^n (n+k) \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n+1} (n+1+k) = \prod_{k=1}^n (n+k) \times (4n+2)$$

Récurrence établie.

(2) Directe :

$$\prod_{k=1}^n (4k-2) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) = 2^n (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) = \frac{(2n)!}{n!}$$

et

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = (n+1)(n+2) \dots (2n) = \frac{(2n)!}{n!}$$

Exercice 27 : [énoncé]

a) Par la formule du binôme

$$S_0 = (1+1)^n = 2^n$$

b) $((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}$ donne

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

donc

$$S_1 = n2^{n-1}$$

c)

$$(x((1+x)^n)')' = (nx(1+x)^{n-1})' = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

donne

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

donc

$$S_2 = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

Exercice 28 : [énoncé]

On a

$$A + B = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$$

et

$$A - B = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} = (1-1)^n = 0^n = 0$$

donc

$$A = B = 2^{n-1}$$

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

Par la formule du binôme

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} j^p = (1+j)^n = 2^n e^{i \frac{n\pi}{3}} \cos^n \frac{\pi}{3}$$

On a aussi

$$A + B + C = (1+1) = 2^n$$

et par ce qui précède

$$A + jB + j^2C = 2^n e^{i \frac{n\pi}{3}} \cos^n \frac{\pi}{3}$$

puis aussi par conjugaison

$$A + j^2B + jC = 2^n e^{-i \frac{n\pi}{3}} \cos^n \frac{\pi}{3}$$

On en déduit

$$A = \frac{2^n}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \cos^n \frac{\pi}{3} \right), B = \frac{2^n}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \cos^n \frac{\pi}{3} \right)$$

et

$$C = \frac{2^n}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{(n+2)\pi}{3} \cos^n \frac{\pi}{3} \right)$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

Le coefficient de x^n dans $(1+x)^p \times (1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ est $\binom{p+q}{n}$.

Lorsqu'on développe le produit $(1+x)^p \times (1+x)^q$, on obtient un x^n en croisant un x^k de $(1+x)^p$ par un x^{n-k} de $(1+x)^q$ (pour $0 \leq k \leq n$). Le coefficient de x^k dans $(1+x)^p$ est $\binom{p}{k}$ et le coefficient x^{n-k} dans $(1+x)^q$ est $\binom{q}{n-k}$ donc le coefficient de x^n dans $(1+x)^p \times (1+x)^q$ est

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$$

d'où l'égalité.

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a^{n-k} b^{k-\ell} c^\ell \text{ et } \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \frac{n!}{(n-k)!(k-\ell)!\ell!}.$$

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)

a) Par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1+(-1))^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On a

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{(n-\ell)!}{(n-k)!(k-\ell)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

c) On a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} x_\ell = \sum_{\ell=0}^n x_\ell \sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell}$$

Or

$$\sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = (-1)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

avec

$$\sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k = x_n$$

Exercice 33 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = n \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n \binom{n-1}{p-1}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} &= \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = n \sum_{p=1}^n \binom{n-1}{p-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 34 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n}$$

En regroupant les deux premiers termes par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+2}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n}$$

puis

$$\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+3}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n} = \binom{p+n+1}{n}$$

Exercice 35 : [énoncé]

On commence par exprimer le produit comme un rapport de nombres factoriels

$$\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right) = \sum_{i=0}^n \frac{(i+p)!}{i!}$$

puis on introduit un coefficient du binôme

$$\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right) = p! \sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i}$$

La somme introduite peut être calculée grâce à la formule de Pascal

$$\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right) = p! \binom{p+n+1}{n} = \frac{(p+n+1)!}{(p+1)n!}$$

Exercice 36 : [énoncé]

Par récurrence sur $n \geq 1$ sachant :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Exercice 37 : [énoncé]

Exploisons

$$\binom{2n+1}{k} = \binom{2n}{k-1} + \binom{2n}{k}$$

On obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k-1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k}$$

Par décalage d'indice

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k}$$

Après simplification,

$$S_n = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Exercice 38 : [énoncé]

a) On suppose n premier. On sait

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

donc

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

ce qui permet d'affirmer que n divise l'entier $k \binom{n}{k}$. Or n est premier et donc premier avec k puisque $k < n$. Par le théorème de Gauss, on peut alors affirmer que n divise $\binom{n}{k}$.

b) Supposons maintenant n composé. On peut introduire p un facteur premier de n avec $p < n$. Nous allons alors montrer que n ne divise pas $\binom{n}{p}$ ce qui permet de conclure.

Par l'absurde, supposons que $m = \frac{1}{n} \binom{n}{p}$ soit un entier. On peut écrire

$$(n-1)! = m.p!(n-p)!$$

Puisque p divise n , on peut aussi écrire $n = pq$ avec q entier et donc

$$(pq - 1)! = mp! (p(q - 1))!$$

Dans les produits définissant $(pq - 1)!$ et $(p(q - 1))!$, on retrouve les mêmes multiples de p , à savoir $p, 2p, \dots, (q - 1)p$. On peut donc écrire

$$(pq - 1)! = ka \text{ et } (p(q - 1))! = kb$$

avec k regroupant le produit des multiples de p précédents et a et b non divisibles par p .

La relation initiale se simplifie alors pour donner

$$a = mp!b$$

ce qui entraîne que a est divisible par p . C'est absurde!

Or, pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux est maximale en son milieu donc

$$\forall 0 \leq k \leq 2n, \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

et donc

$$2^{2n} \leq (2n + 1) \binom{2n}{n}$$

puis l'inégalité proposée.

Exercice 39 : [\[énoncé\]](#)

a) On peut écrire

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ce qui donne directement la relation soumise.

b) Si $1 \leq k \leq n/2$ alors $2k < n + 1$ et donc $n - k + 1 > k$ puis

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}$$

La deuxième inégalité s'en déduit par la relation de symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

c) Pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux croît puis décroît en étant extrême en son milieu.

Exercice 40 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$