

Intégration sur un segment

Continuité uniforme

Exercice 1 [01818] [Correction]

Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 [01819] [Correction]

Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 [01820] [Correction]

Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0; 1]$.

Exercice 4 [02821] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe des réels positifs a et b tels que

$$\forall x \geq 0, |f(x)| \leq ax + b$$

Exercice 5 [03034] [Correction]

Soit $f: [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 6 [03035] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et tendant vers 0 à l'infini. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 7 [03153] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$$\forall x > 0, f(nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Fonctions continues par morceaux

Exercice 8 [02642] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier.

Montrer qu'il existe une subdivision σ du segment $[a; b]$ adaptée à f telle que toute autre subdivision adaptée à f soit plus fine que σ .

Exercice 9 [00246] [Correction]

La fonction $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0; 1]$?

Calcul d'intégrales

Exercice 10 [01964] [Correction]

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{dt}{t^2} \qquad \text{b) } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad \text{c) } \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Exercice 11 [00284] [Correction]

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \qquad \text{b) } \int_1^2 \ln t \, dt \qquad \text{c) } \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$$

Exercice 12 [01963] [Correction]

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt$$

Exercice 13 [01547] [Correction]

Démontrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^1 Q(t) \, dt = -i \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} \, d\theta$$

Exercice 14 [02508] [\[Correction\]](#)

Soit λ un réel tel que $|\lambda| \neq 1$

a) Étudier la fonction

$$f_\lambda(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}}$$

b) Calculer

$$\int_0^\pi f_\lambda(x) dx$$

Exercice 15 [00285] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$$

Calcul de primitives

Exercice 16 [01960] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int t e^{t^2} dt$

b) $\int \frac{\ln t}{t} dt$

c) $\int \frac{dt}{t \ln t}$

Exercice 17 [00279] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int \cos t \sin t dt$

b) $\int \tan t dt$

c) $\int \cos^3 t dt$

Exercice 18 [00280] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{t^2}{1+t^3} dt$

b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$

c) $\int \frac{t}{1+t^4} dt$

Exercice 19 [01962] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{dt}{it+1}$

b) $\int e^t \cos t dt$

c) $\int t \sin t e^t dt$

Exercice 20 [01961] [\[Correction\]](#)

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $a = \operatorname{Re}(\lambda)$ et $b = \operatorname{Im}(\lambda)$. Établir

$$\int \frac{dt}{t - \lambda} = \ln |t - \lambda| + i \arctan \left(\frac{t - a}{b} \right) + C^{te}$$

Intégration par parties

Exercice 21 [01979] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int t \ln t dt$

b) $\int t \arctan t dt$

c) $\int t \sin^3 t dt$

Exercice 22 [00263] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int (t^2 - t + 1) e^{-t} dt$

b) $\int (t - 1) \sin t dt$

c) $\int (t + 1) \operatorname{ch} t dt$

Exercice 23 [01980] [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$

b) $\int_1^e t^n \ln t dt$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

c) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$

Exercice 24 [00287] [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \arctan t dt$

b) $\int_0^{1/2} \arcsin t dt$

c) $\int_0^1 t \arctan t dt$

Exercice 25 [00283] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$$

Exercice 26 [03089] [\[Correction\]](#)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^2([a; b], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [a; b], |f'(x)| \geq \mu \text{ et } f' \text{ monotone}$$

Montrer :

$$\left| \int_a^b e^{2i\pi f(t)} dt \right| \leq \frac{1}{\mu\pi}$$

Changement de variable**Exercice 27** [01982] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives suivantes en procédant par un changement de variable adéquat :

$$\text{a) } \int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \quad \text{b) } \int \frac{\ln t \, dt}{t + t(\ln t)^2} \quad \text{c) } \int \frac{e^{2t} \, dt}{e^t + 1}$$

Exercice 28 [00290] [\[Correction\]](#)

Déterminer

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

Exercice 29 [01983] [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\text{a) } \int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2} \quad \text{b) } \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$$

Exercice 30 [00260] [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

$$\text{a) } \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \, dt \quad \text{b) } \int_0^1 t^2 \sqrt{1 - t^2} \, dt \quad \text{c) } \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \, dt$$

Exercice 31 [01984] [\[Correction\]](#)

a) Observer

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos t) \, dt = \int_0^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right) dt$$

b) En déduire

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) \, dt$$

Exercice 32 [01985] [\[Correction\]](#)

a) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} \, dt = \frac{\pi}{4}$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} + t}$$

Exercice 33 [01986] [\[Correction\]](#)

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x \in [a; b], f(a + b - x) = f(x)$$

Montrer que

$$\int_a^b x f(x) \, dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) \, dx$$

Exercice 34 [00188] [\[Correction\]](#)

a) Soit $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$. Établir

$$\int_0^\pi t f(\sin t) \, dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) \, dt$$

b) En déduire la valeur de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x \sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} \, dx$$

Exercice 35 [03337] [\[Correction\]](#)

- a) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x^3$.
 b) Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 f(3x^2 - 2x^3) dx$$

Exercice 36 [03193] [Correction]

Pour a et b des réels tels que $ab > 0$, on considère

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} dx$$

- a) Calculer $I(-b, -a)$, $I(1/a, 1/b)$ et $I(1/a, a)$ en fonction $I(a, b)$.
 b) Pour $a, b > 1$, calculer $I(a, b)$ via changement de variables $v = x + 1/x$ puis $v = 1/t$.
 c) Montrer que la relation ainsi obtenue est valable pour tout a, b tels que $ab > 0$.

Exercice 37 [00282] [Correction]

Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :

- a) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$
 b) $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t+2t}}$
 c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt$

Exercice 38 [02436] [Correction]

Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

Intégrales fonctions des bornes

Exercice 39 [01987] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

- a) $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$ b) $g(x) = \int_0^x x f(t) dt$ c) $g(x) = \int_0^x f(t+x) dt$

Exercice 40 [01988] [Correction]

Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$$

- a) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
 b) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
 c) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 41 [01989] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit $F: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$$

- a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $F''(x)$.
 b) En déduire

$$F(x) = \int_0^x \int_u^1 f(t) dt du$$

Exercice 42 [01990] [Correction]

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt$$

- a) Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \int_0^x \cos(t-x) g(t) dt$$

- b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
 c) Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 43 [01991] [Correction]

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$$

- a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
 b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale
 c) Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0) = 0$.

Exercice 44 [00088] [Correction]

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t) dt$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f .

Exercice 45 [00276] [Correction]

Pour $x \in]0; 1[$, on pose

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

- a) Montrer que φ est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en 0 et en 1.
 b) En déduire la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$$

Exercice 46 [02444] [Correction]

Soit

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

- a) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.
 b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.
 c) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 47 [03788] [Correction]

- a) Montrer que la fonction

$$f: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- b) Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 48 [00275] [Correction]

Soit

$$f: x \in \mathbb{R}^* \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t} dt$$

- a) Étudier la parité de f . On étudie désormais f sur $]0; +\infty[$.
 b) Prolonger f par continuité en 0.
 c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 d) Branches infinies, allure.

Exercice 49 [00277] [Correction]

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

- a) Prolonger g par continuité en 0.
 b) Montrer que la fonction ainsi obtenue est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50 [03789] [Correction]

Étude et graphe de la fonction

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

On préciser le comportement de la fonction quand $x \rightarrow 0$ et quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercice 51 [02617] [\[Correction\]](#)

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3 - 1}} dt$$

- Montrer que la fonction F est bien définie, continue sur $[1; +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$.
Exprimer sa dérivée $F'(x)$
- Étudier la dérivabilité de F en 1. Préciser la tangente au graphe de F en 1.
- Étudier la limite de F en $+\infty$.
- Justifier que F réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
- Justifier que F^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et solution de l'équation différentielle

$$yy' = \sqrt{y^3 - 1}$$

- Étudier la dérivabilité de F^{-1} en 0.

Sommes de Riemann

Exercice 52 [01998] [\[Correction\]](#)

Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Exercice 53 [01999] [\[Correction\]](#)

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

Exercice 54 [00744] [\[Correction\]](#)

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 55 [02785] [\[Correction\]](#)

Étudier les limites de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n}$ et de $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n}$.

Exercice 56 [02786] [\[Correction\]](#)

Calculer les limites de

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 57 [02787] [\[Correction\]](#)

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$.

Soit x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\lim f_n(x_n)$.

Exercice 58 [03198] [\[Correction\]](#)

Déterminer un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$$

Exercice 59 [03768] [\[Correction\]](#)

Étudier la suite suivante

$$u_n = \frac{r(1) + r(2) + \cdots + r(n)}{n^2}$$

avec $r(k)$ le reste de la division euclidienne de n par k .

Indice : étudier la suite suivante

$$v_n = \frac{(n-r(1)) + (n-r(2)) + \cdots + (n-r(n))}{n^2}$$

Exercice 60 [03428] [\[Correction\]](#)

a) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$$

b) Pour $\alpha > 1$, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^\alpha}$$

c) En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{p}\right)$$

Exercice 61 [02664] [\[Correction\]](#)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right)$$

b) Soit un réel $a \neq \pm 1$; déduire de a) la valeur de

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt$$

Formules de Taylor

Exercice 62 [02816] [\[Correction\]](#)

Énoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégrale.

Exercice 63 [00291] [\[Correction\]](#)

Établir que pour tout $x \in [0; \pi/2]$,

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Exercice 64 [03217] [\[Correction\]](#)

[Égalité de Taylor-Lagrange] Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors

$$\forall x \in I, \exists c \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Exercice 65 [02001] [\[Correction\]](#)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 66 [02002] [\[Correction\]](#)

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

Exercice 67 [00295] [\[Correction\]](#)

En exploitant une formule de Taylor adéquate établir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Exercice 68 [02000] [\[Correction\]](#)

Soit $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Déterminer les fonctions $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivables, telles que

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ et } f'' = g$$

Exercice 69 [02003] [Correction]

Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

Exercice 70 [00293] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose

$$f(x), f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 71 [00297] [Correction]

Soient $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k/n^2) - nf(0)$$

Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Exercice 72 [00296] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(0) \neq 0$.

a) Montrer que, pour chaque $x \in \mathbb{R}^*$, il existe $\theta \in]0; 1[$ vérifiant la relation

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$$

b) Montrer qu'au voisinage de 0 ce θ est unique.

c) Déterminer la limite de θ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 73 [02817] [Correction]

a) Montrer, pour tout $x \in]0; \pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0; 1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(x\theta_x)$$

b) Étudier la limite de θ_x quand x tend vers 0 par valeur supérieure.

Exercice 74 [00255] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$$

a) Montrer que

$$\forall 0 \leq p \leq n, \varphi^{(p)}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-p})$$

b) On introduit $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall 0 \leq p < n, \psi^{(p)}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-p-1})$$

En déduire que ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

d) Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que

$$f(0) = 0, g(x) = 0 \iff x = 0 \text{ et } g'(0) \neq 0$$

Montrer que f/g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 75 [01965] [Correction]

Soient $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $c \in]a; b[$.

Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \max \left(\frac{1}{c-a} \int_a^c f(t) dt, \frac{1}{b-c} \int_c^b f(t) dt \right)$$

Exercice 76 [01967] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt \text{ si, et seulement si, } f \geq 0 \text{ ou } f \leq 0$$

Exercice 77 [01767] [Correction]

f étant continue sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$$

Exercice 78 [03051] [Correction]

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{C})$.

À quelle condition portant sur f a-t-on

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f| ?$$

Exercice 79 [01968] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 80 [01969] [Correction]

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer :

$$\exists c \in]a; b[, \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

Exercice 81 [01970] [Correction]

[Formule de la moyenne] Soient $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec $g \geq 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

Exercice 82 [03092] [Correction]

[Seconde formule de la moyenne] Soient $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec f décroissante et positive.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t) dt \text{ avec } a_k = a + k \frac{(b-a)}{n}$$

Montrer que

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(t) dt$$

b) On introduit G la primitive de g s'annulant en a .

Montrer que

$$f(a) \min_{[a;b]} G \leq S_n \leq f(a) \max_{[a;b]} G$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a; b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt$$

d) Soient $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec f monotone.

Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt + f(b) \int_c^b g(t) dt$$

Exercice 83 [03188] [Correction]

Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I = [a; b]$.

Soit g une fonction continue sur I . On définit $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

a) Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a; b]) = [m; M]$$

b) Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t) dt$$

c) En déduire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt$$

Exercice 84 [01971] [\[Correction\]](#)

Soit $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$$

alors il existe $a \in]0; \pi[$ tel que f s'annule en a .

b) Montrer que si

$$\int_0^\pi f(t) \sin t dt = \int_0^\pi f(t) \cos t dt = 0$$

alors f s'annule 2 fois sur $]0; \pi[$.

(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t) \sin(t - a) dt$).

Exercice 85 [01972] [\[Correction\]](#)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \int_a^b t^k f(t) dt = 0$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a; b]$.

Exercice 86 [01974] [\[Correction\]](#)

Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$$

est lipschitzienne.

Exercice 87 [02966] [\[Correction\]](#)

Soient $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = 0$$

m le minimum de f et M son maximum.

Prouver

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq -mM$$

Exercice 88 [02967] [\[Correction\]](#)

Soient f et g deux fonctions croissantes et continues sur $[0; 1]$. Comparer

$$\int_0^1 f(t)g(t) dt \text{ et } \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \times \left(\int_0^1 g(t) dt \right)$$

Limites d'intégrales

Exercice 89 [01978] [\[Correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin t^2 dt & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$$

Exercice 90 [00286] [\[Correction\]](#)

Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt & \end{array}$$

Exercice 91 [01976] [\[Correction\]](#)

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 92 [01977] [\[Correction\]](#)

Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

Utilisation de primitives

Exercice 93 [03380] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\int_0^1 f(t) dt = 0$$

Montrer qu'il existe $x \in]0; 1[$ vérifiant

$$\int_0^x tf(t) dt = 0$$

Exercice 94 [01966] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = C^{te}$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 95 [01973] [Correction]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que f possède une unique primitive F telle que

$$\int_0^1 F(t) dt = 0$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 96 [00057] [Correction]

[Inégalité de Poincaré] Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$.

a) Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

b) Si $f(1) = 0$, améliorer l'inégalité obtenue en a).

Suites dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 97 [01994] [Correction]

Pour p et q entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (b-t)^q dt$$

- Former une relation de récurrence liant $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
- Donner une expression de $I_{p,q}$ à l'aide de factoriels.

Exercice 98 [01997] [Correction]

[Intégrales de Wallis] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

- Montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ et $I_n > 0$
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

- Donner une expression de I_n à l'aide de factoriels en distinguant les cas $n = 2p$ et $n = 2p + 1$.
- Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

- Déterminer un équivalent de I_n .

Exercice 99 [01992] [Correction]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

- Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.

b) Montrer que

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

c) En déduire que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Exercice 100 [01993] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

- a) Calculer I_0 et I_1 .
 b) Établir une relation liant I_n et I_{n+1} .
 c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < I_n < \frac{e}{n+1}$$

- d) Déterminer la limite puis un équivalent simple de (I_n) .
 e) Soit (u_n) une suite réelle définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n$$

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \rightarrow +\infty$.

Exercice 101 [01995] [\[Correction\]](#)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0; \pi[$.

a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x} dt$$

b) Exprimer I_n . On pourra commencer par calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$.

Exercice 102 [01996] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

a) Calculer u_0, u_1, u_2 .

b) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.

c) Montrer que $u_n \rightarrow 1$.

d) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

e) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$$

et en déduire que

$$u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 103 [00288] [\[Correction\]](#)

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$$

Exercice 104 [00289] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$$

- a) Pour $n \geq 2$, former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2} .
 b) En déduire l'expression de I_n selon la parité du naturel n .

Exercice 105 [02981] [\[Correction\]](#)

Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2} \right)^n dt$$

Exercice 106 [00322] [\[Correction\]](#)

Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$$

- a) Montrer que $I_n \rightarrow 0$ en décroissant.
 b) Simplifier $I_n + I_{n+1}$ et en déduire une expression de I_n à l'aide d'un symbole sommatoire.
 c) Déterminer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- d) Exploiter

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$$

pour déterminer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 107 [01860] [\[Correction\]](#)

- a) Calculer

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

- b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

- c) Justifier

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$$

- d) En déduire

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4}$$

Calcul de primitives de fonctions rationnelles

Exercice 108 [01232] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|----------------------------|
| a) $\frac{x^5}{1+x^{12}}$ | e) $\frac{x}{x^2+2x+2}$ | i) $\frac{x^4+1}{x^4-1}$ |
| b) $\frac{1}{x(x^2-1)}$ | f) $\frac{1}{x(x^2+1)}$ | j) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ |
| c) $\frac{x+1}{x^2-x+1}$ | g) $\frac{1}{x^3+1}$ | k) $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$ |
| d) $\frac{1}{x^2-2x+2}$ | h) $\frac{x}{x^3-1}$ | l) $\frac{1}{x^4+1}$ |

Exercice 109 [01233] [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--|
| a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ | b) $\int_0^1 \frac{x}{x^3+1} dx$ | c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx$ |
|----------------------------------|----------------------------------|--|

Exercice 110 [01234] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désire déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

- a) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée. Celle-ci est désormais notée F_n .
 b) Calculer $F_1(x)$.
 c) En procédant au changement de variable $x = \tan \theta$, déterminer $F_2(x)$.
 d) En s'aidant d'une intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
 e) Calculer $F_3(x)$.

Calcul de primitives ou d'intégrales se ramenant à une fonction rationnelle

Exercice 111 [01235] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| a) $\frac{1}{e^x+1}$ | c) $\sqrt{e^x-1}$ |
| b) $\frac{1}{e^{2x}+e^x}$ | d) $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ |

Exercice 112 [01236] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

Exercice 113 [01237] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives des expressions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$
 b) $\frac{\sin x}{1 + \sin^2 x}$

c) $\frac{1}{\cos^4 x}$
 d) $\frac{1}{\cos^3 x}$

Exercice 114 [01238] [\[Correction\]](#)Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{3 + \cos x}$$

Exercice 115 [03774] [\[Correction\]](#)Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dt}{3 + \cos^2 t}$$

Exercice 116 [01239] [\[Correction\]](#)

Calculer :

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos x}$

b) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$

Exercice 117 [01240] [\[Correction\]](#)Pour $\alpha \in]0; \pi[$, calculer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha \cos x} dx$$

Exercice 118 [01241] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\frac{\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{ch} x}$
 b) $\frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{ch}^2 x}$

c) $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}$
 d) $\frac{1}{\operatorname{ch}^3 x}$

Exercice 119 [01242] [\[Correction\]](#)

Calculer

$$\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$$

Exercice 120 [01243] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\frac{x}{1 + \sqrt{x+1}}$

b) $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

c) $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

Exercice 121 [01244] [\[Correction\]](#)

Déterminer les primitives des fonctions proposées en indiquant l'ensemble de validité :

a) $\frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}}$

d) $\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$

b) $\frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \sqrt{x-x^2+6}$

e) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

c) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 122 [01245] [\[Correction\]](#)Sur $] -1/2; +\infty[$, déterminer

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Exercice 123 [01246] [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$

b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(x+4)}$

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Pour $y \geq x \geq 0$,

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = y + x - 2\sqrt{xy} \leq y - x$$

donc

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$$

Par symétrie

$$\forall x, y \geq 0, |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $\eta = \varepsilon^2 > 0$.

Pour tout $x, y \geq 0$,

$$|y - x| \leq \eta \implies |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|} \leq \sqrt{\eta} = \varepsilon$$

La fonction racine carrée est donc uniformément continue.

Exercice 2 : [énoncé]

Par l'absurde supposons que $x \mapsto \ln x$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y > 0, |y - x| \leq \eta \implies |\ln y - \ln x| \leq \varepsilon$$

Pour $y = x + \eta$,

$$|\ln y - \ln x| = \ln \left(\frac{x + \eta}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f est continue sur le segment $[0; 1]$, donc uniformément continue sur $[0; 1]$ et donc *a fortiori* sur $]0; 1[$.

Exercice 4 : [énoncé]

Pour $\varepsilon = 1 > 0$ l'uniforme continuité assure l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq 1$$

Posons $n = \lfloor x/\alpha \rfloor$. On a $|f(\alpha) - f(0)| \leq 1$, $|f(2\alpha) - f(\alpha)| \leq 1, \dots$,

$|f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)| \leq 1$ et $|f(x) - f(n\alpha)| \leq 1$ donc en sommant

$|f(x) - f(0)| \leq n + 1$ puis $|f(x)| \leq \lfloor x/\alpha \rfloor + 1 + |f(0)| \leq ax + b$ avec $a = 1/\alpha$ et $b = 1 + |f(0)|$.

Exercice 5 : [énoncé]

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0; 1[, |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq 1$$

Par suite, pour tout $x \in [1 - \alpha; 1[$, on a $|f(x) - f(1 - \alpha)| \leq 1$ puis

$|f(x)| \leq 1 + |f(1 - \alpha)|$.

De plus, la fonction f est continue donc bornée sur le segment $[0; 1 - \alpha]$ par un certain M .

On a alors f bornée sur $[0; 1[$ par $\max\{M, 1 + |f(1 - \alpha)|\}$.

Exercice 6 : [énoncé]

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq A, |f(x)| \leq \varepsilon/2$$

et alors

$$\forall x, y \in [A; +\infty[, |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (*)$$

De plus, f est continue sur $[0; A]$ donc uniformément continue et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0; A], |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (**)$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $|y - x| \leq \alpha$. On peut supposer $x \leq y$.

Si $x, y \in [0; A]$, on a $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ en vertu de (**).

Si $x, y \in [A; +\infty[$, on a à nouveau $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ cette fois-ci en vertu de (*).

Si $x \in [0; A]$ et $y \in [A; +\infty[$, on a nécessairement $|x - A| \leq \alpha$. (*) et (**) donnent alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq 2\varepsilon$$

Quitte à adapter le ε de départ, on obtient ce que l'on veut.

Autre méthode : on introduit $g = f \circ \tan$ définie sur $[0; \pi/2[$ que l'on prolonge par continuité en $\pi/2$. Ce prolongement est continue sur un segment donc uniformément continue. Puisque $f = g \circ \arctan$ avec $\arctan$ lipschitzienne, on obtient f uniformément continue !

Exercice 7 : [énoncé]

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x, y > 0, |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Considérons alors la suite $(f(n\alpha))$. Puisque celle-ci converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N, |f(n\alpha)| \leq \varepsilon$$

Posons $A = N\alpha$. Pour $x \geq A$, il existe $n \geq N$ vérifiant

$$|n\alpha - x| \leq \alpha$$

et donc

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(n\alpha)| + |f(n\alpha)| \leq 2\varepsilon$$

On peut alors conclure que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 : [énoncé]

Soit A l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f .

A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément p .

Il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ adaptée à f .

Montrons que toute subdivision $\sigma' = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ adaptée à f est plus fine que σ .

Par l'absurde : supposons $\exists i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tel que $a_i \notin \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$.

On peut alors affirmer qu'il existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_i \in]b_{j-1}; b_j[$.

Comme σ et σ' sont adaptées à f on peut affirmer que f est constante sur

$]a_{i-1}; a_i[$, $]a_i; a_{i+1}[$ et $]b_{j-1}; b_j[$ puis que f est constante sur $]a_{i-1}; a_{i+1}[$.

Par suite la subdivision $\sigma' = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est adaptée à f or cela contredit la définition de p .

Exercice 9 : [énoncé]

Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

Exercice 10 : [énoncé]

Dans chaque cas la détermination d'une primitive est (assez) immédiate

a)

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

c)

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 11 : [énoncé]

a) En linéarisant

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

b) On connaît une primitive du logarithme ou l'on intègre par parties

$$\int_1^2 \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

c) On reconnaît une forme $u'/\sqrt{u}$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = \left[\sqrt{1+t^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Exercice 12 : [énoncé]

Si $m = n = 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Si $m = n \neq 0$ alors

$$I_{n,n} = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nt) \, dt = \pi$$

Si $m \neq n$, en exploitant

$$\cos(mt) \cos(nt) = \frac{1}{2} (\cos(m+n)t + \cos(m-n)t)$$

on obtient

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+n)t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)t \, dt = \frac{[\sin(m+n)t]_0^{2\pi}}{2(m+n)} + \frac{[\sin(m-n)t]_0^{2\pi}}{2(m-n)} =$$

Exercice 13 : [énoncé]

Par linéarité de l'intégrale, il suffit de vérifier la relation pour $Q = X^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

D'une part

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}$$

et d'autre part

$$\int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right]_0^\pi = \frac{e^{i(n+1)\pi} - 1}{i(n+1)}$$

Si n est impair alors

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = 0 = -i \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

Si n est pair alors

$$\int_{-1}^1 Q(t) dt = \frac{2}{n+1} \text{ et } \int_0^\pi Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = \frac{-2}{i(n+1)}$$

et la relation voulue est encore vérifiée.

Une alternative plus courte, mais moins élémentaire consister à exploiter que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = Q(z) dz = Q(x + iy) (dx + i dy)$$

est exacte et que donc son intégrale curviligne le long d'un pourtour fermée est nulle.

Exercice 14 : [énoncé]

a) On peut écrire

$$1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2 = (\lambda - \cos x)^2 + \sin^2 x$$

et par conséquent $1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $|\lambda| \neq 1$.

La fonction f_λ est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, 2π -périodique et impaire. Nous limitons son étude à l'intervalle $[0; \pi]$.

Le cas $\lambda = 0$ est immédiat puisque $f_0(x) = \sin x$. On suppose dans la suite $\lambda \neq 0$.

On a

$$f'_\lambda(x) = \frac{\cos x(1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2) - \lambda \sin^2 x}{(1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2)^{3/2}}$$

$f'_\lambda(x)$ est du signe de

$$\lambda^2 \cos(x) - \lambda(1 + \cos^2 x) + \cos x = (\lambda \cos x - 1)(\lambda - \cos x)$$

Cette expression s'annule en changeant de signe pour $\cos x = \lambda$ ou $\cos x = 1/\lambda$.

Pour $|\lambda| < 1$,

x	0	$\arccos \lambda$	π
$f'_\lambda(x)$	+	0	-
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

Pour $|\lambda| > 1$,

x	0	$\arccos 1/\lambda$	π
$f'_\lambda(x)$	+	0	-
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

b) Pour $\lambda = 0$, on a

$$\int_0^\pi f_0(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = 2$$

Pour $\lambda \neq 0$, on peut directement calculer l'intégrale en reconnaissant une forme $u'/\sqrt{u}$. On obtient

$$\int_0^\pi f_\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} \left[\sqrt{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2} \right]_0^\pi = \frac{|1 + \lambda| - |1 - \lambda|}{\lambda}$$

Pour $|\lambda| < 1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x) dx = 2$$

Pour $|\lambda| > 1$,

$$\int_0^\pi f_\lambda(x) dx = \frac{2}{|\lambda|}$$

Exercice 15 : [énoncé]

La fonction $x \mapsto \ln(1 + \tan x)$ est définie et continue sur $[0; \pi/4]$ donc I existe.

$\ln(1 + \tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - x)$.

Ainsi

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx$$

or

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \stackrel{t = \frac{\pi}{4} - x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln \cos(t) dt$$

donc

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)a) On reconnaît une forme $u'e^u$

$$\int te^{t^2} dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C^{te}$$

b) On reconnaît une forme $u'u$

$$\int \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + C^{te}$$

c) On reconnaît une forme u'/u

$$\int \frac{dt}{t \ln t} = \ln |\ln t| + C^{te}$$

Exercice 17 : [\[énoncé\]](#)a) C'est une forme $u'u$ donc

$$\int \cos t \sin t dt = \frac{1}{2} \sin^2 t + C^{te}$$

b) C'est une forme u'/u donc

$$\int \tan t dt = -\ln |\cos t| + C^{te}$$

c) On se ramène à une forme $u'u^2$ via $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$$\int \cos^3 t dt = \int \cos t - \int \cos t \sin^2 t = \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 18 : [\[énoncé\]](#)Dans chaque cas on reconnaît une forme $u'f(u)$ a) $\int \frac{t^2}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \ln |1+t^3| + C^{te}$ sur $]-\infty; -1[$ ou $]-1; +\infty[$.b) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sqrt{1+t^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.c) $\int \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{1}{2} \arctan t^2 + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.**Exercice 19 :** [\[énoncé\]](#)

a) En isolant partie réelle et imaginaire

$$\int \frac{dt}{it+1} = \frac{1}{i} \int \frac{dt}{t-i} = -i \int \frac{t+i}{t^2+1} dt$$

puis

$$\int \frac{dt}{it+1} = \arctan t - \frac{i}{2} \ln(t^2+1) + C^{te}$$

b) On observe

$$\int e^t \cos t dt = \operatorname{Re} \left(\int e^{(1+i)t} dt \right)$$

et

$$\int e^{(1+i)t} dt = \frac{1}{1+i} e^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int e^t \cos t dt = \frac{e^t}{2} (\cos t + \sin t) + C^{te}$$

c) On observe

$$\int t \sin te^t dt = \operatorname{Im} \left(\int te^{(1+i)t} dt \right)$$

et par intégration par parties

$$\int te^{(1+i)t} dt = \frac{t+i(1-t)}{2} e^{(1+i)t} + C^{te}$$

donc

$$\int t \sin te^t dt = \frac{e^t}{2} (t \sin t + (1-t) \cos t) + C^{te}$$

Exercice 20 : [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$\frac{1}{t-\lambda} = \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + i \frac{b}{(t-a)^2+b^2}$$

or

$$\int \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} dt = \frac{1}{2} \ln |(t-a)^2+b^2| + C^{te} = \ln |t-\lambda| + C^{te}$$

et

$$\int \frac{b}{(t-a)^2+b^2} dt = \arctan \frac{t-a}{b} + C^{te}$$

puis la formule proposée.

Exercice 21 : [énoncé]

a) Par intégration par parties

$$\int t \ln t \, dt = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \int \frac{1}{2} t \, dt = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + C^{te}$$

b) Par intégration par parties

$$\int t \arctan t \, dt = \frac{1}{2} t^2 \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 \, dt}{1+t^2}$$

puis en écrivant

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

on obtient

$$\int t \arctan t \, dt = \frac{1}{2} ((t^2+1) \arctan t - t) + C^{te}$$

c) En écrivant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$$\int t \sin^3 t \, dt = \int t \sin t \, dt - \int t \sin t \cos^2 t \, dt$$

D'une part

$$\int t \sin t \, dt = \sin t - t \cos t + C^{te}$$

D'autre part, par intégration par parties

$$\int t \sin t \cos^2 t \, dt = -\frac{1}{3} t \cos^3 t + \frac{1}{3} \int \cos^3 t \, dt$$

avec

$$\int \cos^3 t \, dt = \int \cos t \, dt - \int \cos t \sin^2 t \, dt = \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t$$

Finalement

$$\int t \sin^3 t \, dt = \frac{2}{3} \sin t - t \cos t + \frac{1}{3} t \cos^3 t + \frac{1}{9} \sin^3 t + C^{te}$$

Exercice 22 : [énoncé]

Par intégration par parties

$$a) \int (t^2 - t + 1) e^{-t} \, dt = -(t^2 + t + 2) e^{-t} + C^{te}.$$

$$b) \int (t-1) \sin t \, dt = \sin t + (1-t) \cos t + C^{te}.$$

$$c) \int (t+1) \operatorname{ch} t \, dt = (t+1) \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t + C^{te}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

Par intégration par parties

a)

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} \, dt$$

En écrivant

$$\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}$$

on obtient

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = \ln 2 - 2[t - \arctan t]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

b) Par intégration par parties

$$\int_1^e t^n \ln t \, dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t \right]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e t^n \, dt = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

c) Par deux intégrations par parties

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt = [t \sin(\ln t)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln t) \, dt = -[t \cos(\ln t)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt$$

donc

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) \, dt = -\frac{1}{2} [t \cos(\ln t)]_1^{e^\pi} = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

Exercice 24 : [énoncé]

Par intégration par parties

a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan t \, dt &= [t \arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \arcsin t \, dt &= [t \arcsin t]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \\ &= \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2} \right]_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_0^1 t \arctan t \, dt &= \frac{1}{2} [t^2 \arctan t]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [t - \arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 25 : [\[énoncé\]](#)

Par intégration par parties

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} \, dt = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

Exercice 26 : [\[énoncé\]](#)

Écrivons

$$\int_a^b e^{2i\pi f(t)} \, dt = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} e^{2i\pi f(t)} \, dt$$

Par intégration par parties

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} e^{2i\pi f(t)} \, dt = \left[\frac{e^{2i\pi f(t)}}{2i\pi f'(t)} \right]_a^b + \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2} e^{2i\pi f(t)} \, dt$$

Quitte à considérer $-f$, supposons $f'' \geq 0$

$$\left| \int_a^b \frac{f''(t)}{f'(t)^2} e^{2i\pi f(t)} \, dt \right| \leq \int_a^b \frac{f''(t)}{f'^2(t)} \, dt = \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)}$$

et donc

$$\left| \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} e^{2i\pi f(t)} \, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(b)} \right]$$

Selon le signe (constant) de f' , le terme en $f'(b)$ ou le terme en $f'(a)$ se simplifie et on obtient

$$\left| \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} e^{2i\pi f(t)} \, dt \right| \leq \frac{1}{\mu\pi}$$

Exercice 27 : [\[énoncé\]](#)

a)

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int \frac{2u \, du}{u + u^3} = \int \frac{2 \, du}{1 + u^2} = 2 \arctan u + C^{te} = 2 \arctan \sqrt{t} + C^{te}$$

b)

$$\int \frac{\ln t \, dt}{t + t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int \frac{ue^u \, du}{e^u + e^u u^2} = \int \frac{u \, du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C^{te} = \frac{1}{2} \ln(1 + \ln^2 t) + C^{te}$$

c)

$$\int \frac{e^{2t} \, dt}{e^t + 1} \underset{u=e^t}{=} \int \frac{u \, du}{u + 1} = \int 1 - \frac{1}{u + 1} \, du = u - \ln(1 + u) + C^{te} = e^t - \ln(1 + e^t) + C^{te}$$

Exercice 28 : [\[énoncé\]](#)Par le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan(\sqrt{t^2 - 1}) + C^{te}$$

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

a)

$$\int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} \underset{u=\ln t}{=} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u + 1}} = [2\sqrt{u + 1}]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

c)

$$\int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1} \underset{u=e^t}{=} \int_1^e \frac{du}{u(u + 1)} = \int_1^e \frac{1}{u} - \frac{1}{u + 1} \, du = [\ln u - \ln(u + 1)]_1^e = \ln 2 - \ln(e + 1) + \ln 2$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

a)

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt \underset{t=\sin u}{=} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 u du = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2u du = \frac{\pi}{16}$$

c)

$$\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_1^{\sqrt{2}} 2 \ln u^2 du = 4[u \ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$$

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)a) Par le changement de variable $u = \pi/4 - t$

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt \int_{\pi/4}^0 -\ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - u\right) du = \int_0^{\pi/4} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt$$

b) On a

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t + \sin t) - \ln \cos t dt$$

or

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - t\right)$$

donc

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt = \int_0^{\pi/4} \ln \sqrt{2} + \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - t\right) - \ln \cos t dt = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)a) Par le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$$

b) Via le changement de variable $t = \sin x$ (avec $x \in [0; \pi/2]$)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 33 : [\[énoncé\]](#)Par le changement de variable $t = a + b - x$

$$\int_a^b x f(x) dx = \int_a^b (a + b - t) f(t) dt$$

donc

$$2 \int_a^b x f(x) dx = (a + b) \int_a^b f(x) dx$$

Exercice 34 : [\[énoncé\]](#)a) Par le changement de variable $u = \pi - t$, on obtient

$$I = \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt = \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u) du$$

et donc

$$2I = \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt + \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u) du = \pi \int_0^{\pi} f(\sin u) du$$

puis l'identité proposée.

b) En observant $\cos^{2n} x = (1 - \sin^2 x)^n$, on peut appliquer la relation précédente

$$I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx$$

En coupant l'intégrale en $\pi/2$

$$I_n = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx \right]$$

En procédant au changement de variable $y = \pi - x$ dans la seconde intégrale

$$I_n = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx$$

Enfin, en procédant au changement de variable $y = \pi/2 - x$, on observe

$$I_n = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx$$

et on en déduit

$$2I_n = \pi \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)} dx \right] = \frac{\pi^2}{2}$$

Finalement

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 35 : [\[énoncé\]](#)

a) L'étude des variations de $\varphi: x \mapsto 3x^2 - 2x^3$ est facile et l'on obtient

x	$-1/2$	0	1	$3/2$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	0

b) On remarque

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + \sin t\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 3t$$

car il est connu que $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$.

On a alors

$$\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3) dx \underset{x=\frac{1}{2}+\sin t}{=} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 3t\right) \cos t dt$$

et

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3) dx \underset{x=\frac{1}{2}+\sin t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 3t\right) \cos t dt$$

Par le changement de variable $u = 3t$,

$$\int_0^1 f(3x^2 - 2x^3) dx = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin u\right) \cos \frac{u}{3} du$$

et

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3) dx = \frac{1}{3} \int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin u\right) \cos \frac{u}{3} du$$

En découpant cette dernière intégrale en trois et en procédant aux changements de variables affines $v = -\pi - u$, $v = u$ et $v = \pi - u$, on obtient

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3) dx = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin v\right) \left(\cos \frac{v+\pi}{3} + \cos \frac{v}{3} + \cos \frac{v-\pi}{3} \right) dv$$

Enfin, en développant

$$\int_{-1/2}^{3/2} f(3x^2 - 2x^3) dx = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin v\right) \cos \frac{v}{3} dv$$

puis la relation demandée.

Exercice 36 : [\[énoncé\]](#)

a) Par parité de la fonction intégrée, on a

$$I(-b, -a) = I(a, b)$$

Par le changement de variable $u = 1/t$, on obtient

$$I(1/a, 1/b) = \int_a^b \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}} \frac{-dt}{t^2} = I(a, b)$$

En particulier

$$I(1/a, a) = I(a, 1/a)$$

alors que par échange des bornes

$$I(1/a, a) = -I(a, 1/a)$$

On en déduit

$$I(1/a, a) = 0$$

b) En procédant aux changements de variable proposés

$$I(a, b) = \int_{a+1/a}^{b+1/b} \frac{-dv}{v\sqrt{v^2-2}} = \int_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)} \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}$$

et donc

$$I(a, b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arcsin \sqrt{2t} \right]_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)}$$

c) Le changement de variable $v = x + 1/x$ n'est pas bijectif quand x parcourt $]0; +\infty[$ mais dans les calculs précédents, il était possible de l'exploiter sans exprimer x en fonction de v . L'hypothèse $a, b > 1$ n'a donc pas été utilisée dans l'étude qui précède et donc le résultat proposé se généralise immédiatement.

Exercice 37 : [énoncé]

a) Via $x = \cos t$

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt = \int_{-1}^1 \frac{dx}{3 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Via $x = \sqrt{t}$

$$\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t} + 2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{1+2x} = [\ln(1+2x)]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3$$

c) Via $x = 1/t$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt = - \int_1^{1/2} \ln(x+1) dx = \int_{3/2}^2 \ln x dx = \frac{7}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}$$

Exercice 38 : [énoncé]

On réalise le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ pour lequel $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

On obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt = \int_0^{2\pi/3} \frac{1}{2} \arcsin(\sin x) \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

On simplifie

$$\arcsin(\sin x) = x \text{ pour } x \in [0; \pi/2]$$

et

$$\arcsin(\sin x) = \pi - x \text{ pour } x \in [\pi/2; 2\pi/3]$$

Enfin on calcule

$$\int_0^{\pi/2} x \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

par intégration par parties sachant

$$\frac{d}{dx} \left(2 \tan \frac{x}{2} \right) = 1 + \tan^2 \frac{x}{2}$$

ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} x \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \left[2x \tan \frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \tan \frac{x}{2} dx$$

puis

$$\int_0^{\pi/2} x \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \pi + \left[4 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right]_0^{\pi/2} = \pi - 2 \ln 2$$

et de même

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (\pi - x) \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + 2 \ln 2 - \pi$$

Au final, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 39 : [énoncé]

On introduit F primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- $g(x) = F(x^2) - F(2x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x)$.
- $g(x) = x(F(x) - F(0))$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x)$.
- $g(x) = \int_{u=t+x}^{2x} f(u) du = F(2x) - F(x)$ est $\mathcal{C}^1$ par opérations et $g'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 40 : [énoncé]

a) φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ existe.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\text{sh } t}{t} dt \underset{u=-t}{=} - \int_x^{2x} \frac{\text{sh } u}{u} du = -f(x)$$

Ainsi f est impaire.

- b) φ est continue donc possède une primitive F . Comme $f(x) = F(2x) - F(x)$ f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\text{sh } 2x - \text{sh } x}{x}$$

pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f'(0) = 1$.

- c) Pour tout $x \geq 0$, on a $\text{sh } 2x \geq \text{sh } x$ donc $f'(x) \geq 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Puisque

$$f(x) \geq \int_x^{2x} \frac{\text{sh } t}{t} dt = \text{sh } x \ln 2$$

on a $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On complète le tableau de variation par parité.

Exercice 41 : [énoncé]

- a) En découpant l'intégrale en deux

$$F(x) = \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

On en déduit que F est dérivable et

$$F'(x) = x f(x) + \int_x^1 f(t) dt - x f(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

Finalement F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $F''(x) = -f(x)$

- b) $F'(1) = 0$ donc

$$F'(u) = - \int_1^u f(t) dt = \int_u^1 f(t) dt$$

Puisque $F(0) = 0$, on a

$$F(x) = \int_0^x F'(u) du = \int_0^x \int_u^1 f(t) dt du$$

Exercice 42 : [énoncé]

- a) En développant

$$f(x) = \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) g(t) dt = \sin x \int_0^x \cos t g(t) dt - \cos x \int_0^x \sin t g(t) dt$$

f est donc dérivable et

$$f'(x) = \cos x \int_0^x \cos t g(t) dt + \sin x \int_0^x \sin t g(t) dt = \int_0^x \cos(t-x) g(t) dt$$

- b) f' est dérivable et

$$f''(x) = -\sin x \int_0^x \cos t g(t) dt + \cos x \int_0^x \sin t g(t) dt + g(x) = - \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt + g(x)$$

donc $f''(x) + f(x) = g(x)$.

- c) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Solution homogène $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Solution particulière $y(x) = f(x)$.

Solution générale

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x \sin(x-t) g(t) dt$$

Exercice 43 : [énoncé]

- a) Soit $\tilde{f}$ une primitive de f .

$$F(x) = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{2x} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{2x} + \frac{\tilde{f}(0) - \tilde{f}(-x)}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(0) = f(0)$$

On prolonge F par continuité en 0 en posant $F(0) = f(0)$.

- b) F est dérivable par opérations et

$$F'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2x} - \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x f(t) dt$$

Par intégration par parties

$$\int_{-x}^x f(t) dt = [t f(t)]_{-x}^x - \int_{-x}^x t f'(t) dt$$

et on peut donc simplifier

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t f'(t) dt$$

c) Sachant

$$\int_{-x}^x t f'(0) dt = 0$$

on peut écrire

$$F'(x) = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t (f'(t) - f'(0)) dt$$

En posant

$$M_x = \sup_{t \in [-x; x]} |f'(t) - f'(0)|$$

on a alors

$$|F'(x)| \leq \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t M_x dt = \frac{1}{2} M_x$$

Or f' est continue en 0, donc $M_x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ puis

$$F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

En vertu du théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut affirmer que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Exercice 44 : [énoncé]

Puisque continue, la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = F(2y + x) - F(2x + y)$$

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$f: x \mapsto f(y) + F(2y + x) - F(2x + y)$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = f'(2y + x) - 2f'(2x + y)$$

En dérivant cette relation en la variable y , on obtient

$$0 = 2f'(2y + x) - 2f'(2x + y)$$

et donc

$$f'(2y + x) = f'(2x + y)$$

Puisque pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ x + 2y = t \end{cases}$$

on peut affirmer que la fonction f' est constante.

On en déduit que la fonction f est affine.

Par le calcul, on vérifie que, parmi les fonctions affines, seule la fonction nulle vérifie la relation proposée.

Exercice 45 : [énoncé]

a) Soit $x \in]0; 1[$, $[x; x^2] \subset]0; 1[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0; 1[$ donc

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \text{ existe.}$$

Pour $t \in [x^2; x]$,

$$\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x^2}$$

donc

$$\frac{x^2 - x}{\ln x^2} \leq \varphi(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\varphi(x) \rightarrow 0$.

On a aussi

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{t dt}{t \ln t}$$

donc

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t} \leq \varphi(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t}$$

or

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \ln 2$$

Quand $x \rightarrow 1^-$, $\varphi(x) \rightarrow \ln 2$.

Finalement φ peut être prolongée par continuité en 0 et en 1.

b) Soit F une primitive de $\frac{1}{\ln t}$ sur $]0; 1[$.

On a $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$ ce qui permet de dériver φ et d'obtenir

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$ est définie car on vérifie aisément que la fonction intégrée peut être prolongée par continuité en 0 et en 1 et on a

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = [\varphi(x)]_0^1 = \ln 2$$

Exercice 46 : [énoncé]

- a) La fonction f est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in]0; 1[$, on a pour tout $t \in [x^2; x]$, $2 \ln x \leq \ln t \leq \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t \ln t} dt$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2 , on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln |\ln t|]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln 2$.

- b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ avec $f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
- c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 47 : [énoncé]

- a) La fonction $t \mapsto e^t/t$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$, elle y admet donc une primitive F .
Pour $x > 0$, on a $[x; 2x] \subset]0; +\infty[$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et

$$f(x) = F(2x) - F(x)$$

Puisque la fonction F est dérivable, la fonction f l'est aussi et

$$f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}$$

L'étude pour $x < 0$ est similaire en considérant $t \mapsto e^t/t$ définie et continue sur $]-\infty; 0[\supset]2x; x]$.

- b) Pour $x > 0$,

$$\forall t \in [x; 2x], e^x \leq e^t \leq e^{2x}$$

donc

$$e^x \ln 2 \leq f(x) \leq e^{2x} \ln 2$$

puis

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln 2$$

L'étude est analogue en 0^-

Exercice 48 : [énoncé]

- a) Par le changement de variable $u = -t$, on obtient que f est paire.
b) Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall t \in [x; 2x], \frac{\operatorname{ch} x}{t} \leq \frac{\operatorname{ch} t}{t} \leq \frac{\operatorname{ch} 2x}{t}$$

En intégrant, on obtient

$$\operatorname{ch} x \cdot \ln 2 \leq f(x) \leq \operatorname{ch} 2x \cdot \ln 2$$

et on en déduit

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln 2$$

- c) La fonction $t \mapsto \operatorname{ch} t/t$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc y admet une primitive G et puisque $f(x) = G(2x) - G(x)$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} 2x - \operatorname{ch} x}{x}$$

De plus

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

donc, par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

d) Puisque $f(x) \geq \ln 2$, f présente une branche parabolique verticale.

Exercice 49 : [énoncé]

a) On a

$$g(x) - f(0) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) - f(0) dt$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$|x| \leq \alpha \implies |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$$

Par suite, si $|x| \leq \alpha$, pour tout t compris entre 0 et x , $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ puis par intégration, $|g(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. Ainsi $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$. On pose $g(0) = f(0)$.

b) Par opération, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x}$$

Procédons à une intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) dt = xf(x) - \int_0^x tf'(t) dt$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf'(t) dt$$

De façon semblable à ce qui précède, on obtient

$$g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} f'(0)$$

Ainsi la fonction continue g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(0) = \frac{1}{2} f'(0)$$

Exercice 50 : [énoncé]

Posons

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

On a

$$F(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$$

ce qui assure que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Le changement de variable $t = -u$ assure que F est impaire.

Par dérivation de primitive

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+(2x)^2+(2x)^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$$

En réduisant au même dénominateur et en multipliant par la quantité conjuguée, $F'(x)$ est du signe de

$$4(1+x^2+x^4) - (1+(2x)^2+(2x)^4) = 3(1-4x^4)$$

F est donc croissante que $[0; 1/\sqrt{2}]$ puis décroissante sur $[1/\sqrt{2}; +\infty[$

En 0, le graphe de la fonction passe par l'origine avec une tangente d'équation $y = x$.

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+x^2+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} \rightarrow 0$$

et donc F tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 51 : [énoncé]

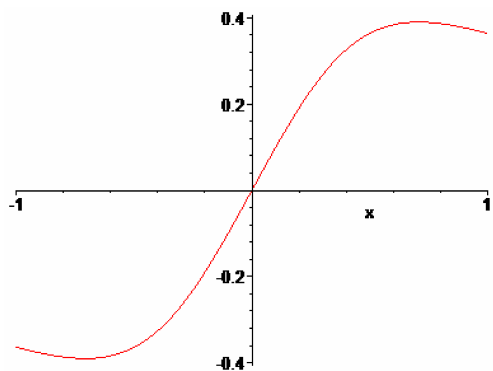
a)

$$f: t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{t}{\sqrt{(t-1)(t^2+t+1)}}$$

est définie et continue sur $]1; x]$ et

$$f(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{t-1}}$$

donc $F(x)$ existe.



F est primitive de la fonction continue f sur $]1; +\infty[$ donc F est $\mathcal{C}^1$ et $F'(x) = f(x)$.

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, F est finalement $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]1; +\infty[$

$$F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

b) F est continue en 1 et $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$. Tangente verticale en 1.

c) $\sqrt{t^3 - 1} \leq t^{3/2}$ donc

$$F(x) \geq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

d) F est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ donc F réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.

F réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]1; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$ avec $F'(x) \neq 0$ donc F^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

$$(F^{-1})' = \frac{1}{F' \circ F^{-1}} = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

donc F^{-1} est solution de l'équation différentielle considérée.

e) F^{-1} est continue en 0 et $F^{-1}(0) = 1$. En vertu de la relation

$$(F^{-1})' = \frac{\sqrt{(F^{-1})^3 - 1}}{F^{-1}}$$

on obtient

$$(F^{-1})'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

F^{-1} est donc dérivable en 0 et $(F^{-1})'(0) = 0$.

Exercice 52 : [énoncé]

a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{1 + (k/n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 2$$

c)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + 2k/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x}} = [\sqrt{1 + 2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$$

Exercice 53 : [énoncé]

On peut écrire

$$S_n = n\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \right)$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f: t \mapsto \sqrt{t}$ définie et continue sur $[0; 1]$.

Par somme de Riemann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(t) dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

donc

$$S_n \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$$

Exercice 54 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\ln \left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

La fonction $x \rightarrow \ln(1+x)$ étant continue sur $[0; 1]$, on obtient

$$\ln \left(\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$$

On en déduit

$$\left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{4}{e}$$

Exercice 55 : [\[énoncé\]](#)

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \rightarrow \int_0^1 \ln(1+t) dt = 2 \ln 2 - 1$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n} \rightarrow \frac{4}{e}$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ donc

$$1 \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

puis

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n} \rightarrow 1$$

Exercice 56 : [\[énoncé\]](#)Pour $x \geq 0$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ donc $|\sin x - x| \leq Mx^3$ avec $M = 1/6$.

On a alors

$$\left| \sin \frac{k}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right| \leq M \cdot \frac{k^3}{n^6} \leq \frac{M}{n^3}$$

donc

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) - \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \frac{k}{n^2} \right| \leq \frac{M}{n^2} \rightarrow 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \frac{k}{n^2} \rightarrow \int_0^1 t \sin t dt$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \rightarrow \sin 1 - \cos 1$$

Pour $x \geq 0$, $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x$ donne aussi $|\sin^2 x - x^2| \leq M'x^4$ avec $M' = 1/3$.

Ainsi

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \right| \leq M' \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+n)^2} \leq \frac{M'}{n} \rightarrow 0$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k+n}} \rightarrow \ln 2$$

Exercice 57 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos kx = \cos \frac{(n+1)x}{2} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

donc

$$x_n = \frac{\pi}{n+1}$$

Par suite

$$f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1}}{\frac{k}{n+1}}$$

Or la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)/t$ peut être prolongée en une fonction continue sur $[0; 1]$ donc par somme de Riemann

$$f_n(x_n) \rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t} dt$$

Exercice 58 : [\[énoncé\]](#)

On peut écrire

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + 2k/n)^3} = \frac{1}{n^2} S_n$$

avec

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + 2k/n)^3}$$

Par les sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{(1 + 2t)^3} = \left[-\frac{1}{4(1 + 2t)^2} \right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

On en déduit

$$u_n \sim \frac{2}{9n^2}$$

Exercice 59 : [\[énoncé\]](#)

La division euclidienne de n par k s'écrit

$$n = [n/k] k + r(k)$$

et donc

$$n - r(k) = k [n/k]$$

puis

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left[\frac{n}{k} \right]$$

ce qui fait penser à une somme de Riemann associée à la fonction $f: t \mapsto t [1/t]$ définie et continue par morceaux sur $]0; 1]$. Bien qu'elle soit prolongeable par continuité en 0, ce prolongement n'est pas continue par morceaux sur $[0; 1]$ (il n'existe pas de subdivision finie du segment $[0; 1]$ qui soit adaptée) et l'on ne peut donc pas employer directement le théorème du cours relatif aux sommes de Riemann : cela va nous obliger à un petit découpage...

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[n/N]} \frac{k}{n} \left[\frac{n}{k} \right] + \frac{1}{n} \sum_{k=[n/N]+1}^n \frac{k}{n} \left[\frac{n}{k} \right]$$

D'une part

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[n/N]} \frac{k}{n} \left[\frac{n}{k} \right] \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[n/N]} 1 \leq \frac{[n/N]}{n} \leq \frac{1}{N}$$

et d'autre part, par les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n - [n/N]} \sum_{k=[n/N]+1}^n \frac{k}{n} \left[\frac{n}{k} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{1/N}^1 t [1/t] dt$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_{1/N}^1 t [1/t] dt = \int_1^N \frac{[u]}{u^3} du = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{k}{u^3} du$$

puis

$$\int_{1/N}^1 t [1/t] dt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{12}$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N \leq \varepsilon$ et $\frac{1}{2} \sum_{k=N+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon$, on a

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + \frac{n - [n/N]}{n} \left(\frac{1}{n - [n/N]} \sum_{k=[n/N]+1}^n \frac{k}{n} \left[\frac{n}{k} \right] - \frac{\pi^2}{12} \right) + \frac{[n/N]}{n} \frac{\pi^2}{12}$$

Puis pour n assez grand

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + \frac{n - [n/N]}{n} \left(\sum_{k=N+2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \varepsilon \right) + \frac{[n/N]}{n} \frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left| v_n - \frac{\pi^2}{12} \right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \frac{\pi^2}{12}$$

Finalement $v_n \rightarrow \pi^2/12$ puis $u_n \rightarrow 1 - \pi^2/12$

Exercice 60 : [\[énoncé\]](#)

a) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$$

b) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^\alpha} = n^{1-\alpha} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^\alpha} \rightarrow 0 \times \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = 0$$

c) Sachant pour $x > 0$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

on obtient

$$\left| \sum_{p=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{p}\right) - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^3}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{p}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \ln 2$$

Exercice 61 : [énoncé]

a) Les deux polynômes de l'égalité sont unitaires, de degré $2n$ et ont pour racines les racines $2n$ -ième de l'unité car les racines du polynôme $X^2 - 2X \cos(k\pi/n) + 1$ sont les $e^{\pm ik\pi/2n}$.

b) Par les sommes de Riemann,

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + 1)$$

Or

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + 1) = \frac{\pi}{n} \ln \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1}$$

Si $|a| < 1$ alors $\frac{\pi}{n} \ln \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \rightarrow 0$ et donc

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt = 0$$

Si $|a| > 1$ alors $\frac{\pi}{n} \ln \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \rightarrow 2\pi \ln |a|$ et donc

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt = 2\pi \ln |a|$$

Exercice 62 : [énoncé]

C'est du cours !

Exercice 63 : [énoncé]

Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t) dt$$

or

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \cos(t) dt \leq \frac{x^5}{120}$$

donc

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Exercice 64 : [énoncé]

Soit $x \in I$

Cas $x = a$

N'importe quel c convient.

Cas $x > a$

Par la formule de Taylor-Laplace

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Posons

$$m = \min_{[a;x]} f^{(n+1)} \text{ et } M = \max_{[a;x]} f^{(n+1)}$$

On a

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $f^{(n+1)}$, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cas $x < a$

Semblable

Exercice 65 : [\[énoncé\]](#)

En appliquant la formule de Taylor reste intégrale à la fonction $x \mapsto e^x$ entre 0 et x on obtient :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

donc

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right|$$

Si $x \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| &= \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x dt \\ &= \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Si $x \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| &= \left| \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On aurait aussi pu appliquer directement l'inégalité de Taylor-Lagrange à la restriction de f sur $[-|x|; |x|]$.

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Exercice 66 : [\[énoncé\]](#)

La fonction $f: x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}$$

$f(0) = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$ pour $k > 0$ et $|f^{(n+1)}(x)| \leq n! = M$ sur $\mathbb{R}_+$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{M x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour $x = 1$, on obtient :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$$

Exercice 67 : [\[énoncé\]](#)

Considérons la fonction $f: t \rightarrow \ln(1+t)$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = 0$,

$$\forall k \geq 1, f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+t)^k}$$

donc

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

Sur $[0; 1]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq n!$ donc l'inégalité de Taylor Lagrange donne

$$\left| f(1) - f(0) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

i.e.

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \rightarrow \ln 2$$

Exercice 68 : [\[énoncé\]](#)

Si f est solution alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et par la formule de Taylor reste-intégrale :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t) dt = xf'(0) + \int_0^x (x-t)g(t) dt$$

Or $f(1) = 0$ donc $f'(0) = \int_0^1 (t-1)g(t) dt$ puis

$$f(x) = x \int_0^1 (t-1)g(t) dt + \int_0^x (x-t)g(t) dt$$

Inversement, considérons f définie par :

$$f(x) = x \int_0^1 (t-1)g(t) dt + \int_0^x (x-t)g(t) dt$$

On a $f(0) = f(1) = 0$. De plus

$$f(x) = x \int_0^1 (t-1)g(t) dt + x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x tg(t) dt$$

donc f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)g(t) dt + \int_0^x g(t) dt + xg(x) - xg(x)$$

f est donc deux fois dérivable et

$$f''(x) = g(x)$$

Exercice 69 : [\[énoncé\]](#)

En vertu du théorème de Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2f''(a) + o(h^2)$$

donc

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h^2f''(a) + o(h^2)$$

puis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a)$$

Exercice 70 : [\[énoncé\]](#)

Par Taylor avec reste intégral

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t) dt$$

donc

$$|f'(x)| \leq |f(x)| + |f(x+1)| + \max_{x \leq t \leq x+1} |f''(t)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 71 : [\[énoncé\]](#)

Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $M = \max_{[0;1]} |f''|$:

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) - \frac{k}{n^2}f'(0) \right| \leq \frac{M}{2} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

Par suite

$$\left| S_n - \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leq \frac{M}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq \frac{M}{2n} \rightarrow 0$$

or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f'(0) = \frac{n+1}{2n} f'(0)$$

donc

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(0)/2$$

Exercice 72 : [\[énoncé\]](#)

- L'existence de θ est assurée par le théorème des accroissements finis.
- Si deux réels θ et θ' sont solutions distinctes alors, par le théorème de Rolle, f'' s'annule entre θx et $\theta' x$. Or $f''(0) \neq 0$, donc il existe un voisinage de 0 sur lequel f'' ne s'annule pas et sur ce voisinage on a l'unicité de θ .
- Par la formule de Taylor-Young appliquée à f' :

$$f'(\theta x) = f'(0) + x\theta f''(0) + o(x)$$

En substituant dans la relation initiale, on obtient

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\theta f''(0) + o(x^2)$$

Or la formule de Taylor-Young appliquée à f donne

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

On en déduit

$$x^2 \theta f''(0) + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$

Sachant $f''(0) \neq 0$, on en déduit $\theta \rightarrow 1/2$ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 73 : [\[énoncé\]](#)

Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :

$$\forall x \in]0; \pi/2[, \exists \xi \in]0; x[, \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos(\xi)$$

Le réel $\theta_x = \xi/x$ convient alors

À défaut de connaître l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste-intégrale

$$\sin x = x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt$$

Or pour $t \in [0; x]$, on a

$$\cos x \leq \cos t \leq 1$$

avec inégalité stricte pour $t \in]0; x[$ donc

$$\frac{x^3}{6} \cos x < \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt < \frac{x^3}{6}$$

Ainsi

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \cos t \, dt = \lambda \frac{x^3}{6} \text{ avec } \cos x < \lambda < 1 = \cos 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in]0; 1[$$

Quand $x \rightarrow 0$, $x\theta_x \rightarrow 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + o(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + o(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \rightarrow 1/10$ puis

$$\theta_x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Exercice 74 : [\[énoncé\]](#)

a) Par la formule de Taylor Young :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + o(x^n)$$

$\varphi(x) = o(x^n)$ entraîne alors $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.

En appliquant la formule de Taylor Young à $\varphi^{(p)}$, on obtient la conclusion.

b) $x\psi(x) = \varphi(x) = o(x^n)$ donc $\psi(x) = o(x^{n-1})$.

$x\psi'(x) + \psi(x) = \varphi'(x) = o(x^{n-1})$ donc $\psi'(x) = o(x^{n-2})$

$x\psi''(x) + 2\psi'(x) = \varphi''(x) = o(x^{n-2})$ donc $\psi''(x) = o(x^{n-3})$...

Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

c) On introduit

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) \right)$$

On a $\varphi(x) = o(x^n)$ donc ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ puis

$$g(x) = \psi(x) + \left(f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!}f^{(n)}(0) \right)$$

est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

d)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x} \frac{1}{g(x)/x}$$

avec $x \mapsto f(x)/x$ et $x \mapsto g(x)/x$ qui se prolongent en 0 en des fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Exercice 75 : [énoncé]

Supposons

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f \geq \frac{1}{b-c} \int_c^b f$$

On a alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \int_a^c f + \frac{b-c}{c-a} \int_a^c f = \frac{b-a}{c-a} \int_a^c f$$

Le cas

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f < \frac{1}{b-c} \int_c^b f$$

est semblable et on peut conclure.

Exercice 76 : [énoncé]

($\Leftarrow$) ok

($\Rightarrow$) Si $\int_a^b f \geq 0$ alors $\int_a^b f = \int_a^b |f|$ donne $\int_a^b |f(t)| - f(t) dt = 0$. Or la fonction $|f| - f$ est continue et positive donc elle est nulle.

Le cas $\int_a^b f < 0$ est semblable.

Exercice 77 : [énoncé]

Montrons que l'égalité proposée a lieu si, et seulement si, la fonction f est de signe constant

Si f est positive alors $|f| = f$ et donc l'égalité a lieu.

Si f est négative alors $|f| = -f$ et à nouveau l'égalité a lieu.

Inversement, supposons

$$\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$$

Si $\int_a^b f \geq 0$ alors on obtient

$$\int_a^b f = \int_a^b |f|$$

et donc

$$\int_a^b |f(x)| - f(x) dx = 0$$

La fonction $|f| - f$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Par suite $f = |f|$ et donc f est positive.

Si $\int_a^b f \leq 0$, l'étude en analogue en observant

$$\int_a^b |f(x)| + f(x) dx = 0$$

Exercice 78 : [énoncé]

Supposons $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$.

On peut écrire $\int_a^b f = re^{i\theta}$ avec $r = \left| \int_a^b f \right|$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Considérons alors $g: t \mapsto f(t)e^{-i\theta}$.

On a $\int_a^b g = \left| \int_a^b f \right| \in \mathbb{R}$ donc $\int_a^b g = \int_a^b \operatorname{Re}(g)$.

Or $|g| = |f|$ et l'hypothèse de départ donne $\int_a^b |g| = \int_a^b \operatorname{Re}(g)$ puis $\int_a^b |g| - \operatorname{Re}(g) = 0$.

Puisque la fonction réelle $|g| - \operatorname{Re}(g)$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle.

Par suite $\operatorname{Re}(g) = |g|$ et donc la fonction g est réelle positive.

Finalement, la fonction f est de la forme $t \mapsto g(t)e^{i\theta}$ avec g fonction réelle positive.

La réciproque est immédiate.

Exercice 79 : [énoncé]

La fonction $\varphi: t \mapsto f(t) - t$ est définie, continue sur $[0; 1]$ et

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2} = 0$$

donc φ s'annule.

Exercice 80 : [énoncé]

Posons

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

La fonction $\varphi: t \mapsto f(t) - \mu$ est définie, continue sur $[a; b]$ et

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \mu(b-a) = 0$$

donc φ s'annule.

Exercice 81 : [\[énoncé\]](#)

Si $\int_a^b g(t) dt = 0$ alors $g = 0$ (car on sait g continue et positive) et le problème est immédiatement résolu.

Sinon, puisque f est continue sur le segment $[a; b]$, elle admet un minimum et maximum en des points c et d .

Posons $m = f(c)$ et $M = f(d)$.

Par positivité de la fonction g , on a

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$$

donc

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre c et d pour conclure.

Exercice 82 : [\[énoncé\]](#)

a) En exploitant la relation de Chasles, on peut écrire

$$S_n - \int_a^b f(t)g(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t)) g(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur le segment $[a; b]$, elle y est uniformément continue et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall s, t \in [a; n], |s - t| \leq \alpha \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a $|(b-a)/n| \leq \alpha$ et alors pour tout $t \in [a_k; a_{k+1}]$ on a $|a_k - t| \leq \alpha$ donc $|f(a_k) - f(t)| \leq \varepsilon$. On en déduit

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varepsilon |g(t)| dt \leq \varepsilon M(b-a) \text{ avec } M = \sup_{[a;b]} |g|$$

Par suite

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)g(t) dt$$

b) En exprimant l'intégrale à l'aide de la primitive G

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) (G(a_{k+1}) - G(a_k))$$

En séparant la somme en deux, puis en procédant à un décalage d'indice sur la première

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(a_{k-1})G(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)G(a_k)$$

puis en recombinaison les deux sommes

$$S_n = f(a_{n-1})G(a_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_{k-1}) - f(a_k)) G(a_k) - f(a_0)G(a_0)$$

Or $G(a_0) = G(a) = 0$ et puisque la fonction f est décroissante et positive

$$S_n \leq f(a_{n-1})M + \sum_{k=1}^{n-1} (f(a_{k-1}) - f(a_k)) M \text{ avec } M = \max_{[a;b]} G$$

Enfin par télescopage

$$S_n \leq f(a_0)M = f(a)M$$

De façon symétrique, on a aussi

$$S_n \geq f(a)m \text{ avec } m = \min_{[a;b]} G$$

c) En passant à la limite ce qui précède, on obtient

$$f(a)m \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq f(a)M$$

Si $f(a) = 0$, le problème est immédiatement résolu, sinon, ce qui précède affirme que

$$\frac{1}{f(a)} \int_a^b f(t)g(t) dt$$

est valeur intermédiaire à deux valeurs prises par G et le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

d) Quitte à considérer $-f$, ce qui ne change rien au problème posé, on peut supposer que la fonction f est croissante. En appliquant le résultat précédent

à la fonction $t \mapsto f(b) - f(t)$ décroissante et positive, on peut affirmer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b (f(b) - f(t))g(t) dt = (f(b) - f(a)) \int_a^c g(t) dt$$

et il suffit de réorganiser les membres de cette identité pour former celle voulue.

Exercice 83 : [énoncé]

- La fonction G est continue donc l'image d'un segment est un segment.
- Il suffit de procéder à une intégration par parties.
- Puisque la fonction $-f'$ est positive, on a

$$m(f(a) - f(b)) \leq - \int_a^b f'(t)G(t) dt \leq M(f(a) - f(b))$$

et donc

$$mf(a) + [G(b) - m]f(b) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(a) + [G(b) - M]f(b)$$

puis

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(a)$$

Ainsi, que $f(a)$ soit nul ou non, il existe $c \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a)G(c)$$

Exercice 84 : [énoncé]

- $\int_0^\pi f(t) \sin t dt = 0$ et $t \mapsto f(t) \sin t$ est continue donc il existe $a \in]0; \pi[$ tel que $f(a) \sin a = 0$ i.e. $f(a) = 0$.
- Par l'absurde si f ne s'annule qu'une seule fois alors le tableau de signe de f est de l'une des quatre formes suivantes

t	0	a	π
$f(t)$	0	+	0

,

t	0	a	π
$f(t)$	0	-	0

t	0	a	π
$f(t)$	0	+	0

ou

t	0	a	π
$f(t)$	0	-	0

Les deux premiers cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t) \sin t dt$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.

Les deux autres cas sont à exclure car

$$\int_0^\pi f(t) \sin(t - a) dt = \cos a \int_0^\pi f(t) \sin t dt - \sin a \int_0^\pi f(t) \cos t dt$$

est l'intégrale nulle d'une fonction non nulle de signe constant.

Absurde.

Exercice 85 : [énoncé]

Notons que l'hypothèse initiale donne par linéarité que pour toute fonction polynomiale P de degré $\leq n$

$$\int_a^b P(t)f(t) dt = 0$$

Par l'absurde supposons que la fonction f ne s'annule pas plus de n fois et notons $x_1 < \dots < x_p$ (avec $p \leq n$) les points où f s'annule tout en changeant de signe. On peut dresser le tableau de signe de la fonction continue f et affirmer que la fonction

$$x \mapsto (x - x_1) \dots (x - x_p)f(x)$$

est de signe constant. Or cette fonction est continue et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Il en découle que la fonction f est nulle sur $[a; b] \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ puis nulle sur $[a; b]$ par argument de continuité.

Exercice 86 : [énoncé]

Posons $g(x) = \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$.

$$g(x) - g(y) = \int_a^b f(t) (\sin(xt) - \sin(yt)) dt$$

Puisque la fonction sinus est lipschitzienne

$$|\sin(xt) - \sin(yt)| \leq |x - y| |t|$$

donc

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y| \int_a^b |tf(t)| dt$$

Ainsi g est lipschitzienne.

Exercice 87 : [\[énoncé\]](#)

La fonction $t \mapsto (M - f(t))(f(t) - m)$ est positive donc

$$\int_0^1 (M - f(t))(f(t) - m) dt \geq 0$$

En développant et par linéarité, on obtient $-mM - \int_0^1 f^2(t) dt \geq 0$ sachant $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

On en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 88 : [\[énoncé\]](#)

Nous allons établir l'inégalité

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right) \times \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \leq \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

On peut commencer par observer que si cette inégalité est vraie pour f et g , elle l'est encore pour $f + \lambda$ et $g + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On peut donc, sans perte de généralités, supposer $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 g(t) dt = 0$ et il s'agit alors d'établir

$$\int_0^1 f(t)g(t) dt \geq 0.$$

Il existe alors $a \in [0; 1]$ tel que $f(x) \leq 0$ pour $x \in [0; a]$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \in [a; 1]$.

Il existe aussi $b \in [0; 1]$ tel que $g(x) \leq 0$ pour $x \in [0; b]$ et $g(x) \geq 0$ pour $x \in [b; 1]$.

Quitte à échanger f et g , on peut supposer $a \leq b$.

$$\int_0^1 f(t)g(t) dt = \int_0^a f(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_b^1 f(t)g(t) dt$$

$$\int_0^a f(t)g(t) dt \geq 0 \text{ car } f(t), g(t) \leq 0 \text{ sur } [0; a].$$

$$\int_a^b f(t)g(t) dt \geq f(b) \int_a^b g(t) dt \text{ car } f(t) \leq f(b) \text{ et donc } f(t)g(t) \geq f(b)g(t) \text{ puisque } g(t) \leq 0.$$

$$\int_b^1 f(t)g(t) dt \geq f(b) \int_b^1 g(t) dt \text{ car } f(t) \geq f(b) \text{ et donc } f(t)g(t) \geq f(b)g(t) \text{ puisque } g(t) \geq 0.$$

On en déduit

$$\int_0^1 f(t)g(t) dt \geq f(b) \int_a^1 g(t) dt \geq 0$$

et on peut conclure.

Notons que la comparaison

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right) \times \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \leq \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

ne peut être améliorée car c'est une égalité quand f et g sont des fonctions constantes.

Exercice 89 : [\[énoncé\]](#)

a) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\left| \int_{-x}^x \sin t^2 dt \right| \leq \int_{-x}^x |\sin t^2| dt \leq \int_{-x}^x 1 dt = 2x \rightarrow 0$$

donc $\int_{-x}^x \sin t^2 dt \rightarrow 0$.

b) Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$$

donc

$$\frac{x}{\ln 2x} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$$

puis

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t} \rightarrow +\infty$$

c) Par intégration par parties

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

Or quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^{2x} \rightarrow 0 \text{ et } \left| \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} \rightarrow 0$$

donc

$$\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow 0$$

Exercice 90 : [\[énoncé\]](#)

a) Quand $x \rightarrow 0^+$, par croissance de la fonction exponentielle

$$\int_x^{2x} \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} dt$$

donc

$$e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \rightarrow \ln 2$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$, par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{1/t}$

$$\int_x^{2x} \frac{e^{1/2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{1/x}}{t} dt$$

donc

$$e^{1/x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \leq e^{1/2x} \ln 2$$

puis par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt \rightarrow \ln 2$$

c) Quand $x \rightarrow +\infty$, pour x assez grand, la fonction $t \mapsto \cos(1/t)$ est croissante sur $[x; 2x]$ donc

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/x)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(1/2x)}{t} dt$$

puis

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \leq \cos\left(\frac{1}{2x}\right) \ln 2$$

et par encadrement

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt \rightarrow \ln 2$$

Exercice 91 : [\[énoncé\]](#)

f est continue sur un segment, elle y est donc bornée par un certain M et alors

$$\left| \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |t^n| |f(t)| dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1} \rightarrow 0$$

Exercice 92 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - f(0) \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)| dt$$

Par la continuité de f en 0, Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq \alpha \implies |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - f(0) \right| \leq \varepsilon$$

On peut donc conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(0)$$

On peut aussi très efficacement obtenir le résultat en introduisant une primitive de f et en exploitant

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0)$$

Exercice 93 : [\[énoncé\]](#)

Introduisons

$$F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ et } G: x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$$

Par intégration par parties

$$G(x) = xF(x) - \int_0^x F(t) dt = \int_0^x [F(x) - F(t)] dt$$

Cas F n'est pas de signe constant

Il existe alors $a, b \in]0; 1[$ tel que

$$F(a) = \min_{[0;1]} F < 0 \text{ et } F(b) = \max_{[0;1]} F > 0$$

Par intégration d'une fonction continue, non nulle et de signe constant sur un intervalle non singulier, on a

$$G(a) < 0 \text{ et } G(b) > 0$$

et le théorème des valeurs intermédiaires assure que G s'annule.

Cas F est de signe constant

Quitte à considérer $-f$, supposons F positive.

Si F est nulle, il en est de même de f et la propriété est immédiate, sinon, on peut introduire $b \in]0; 1[$ tel que

$$F(b) = \max_{[0;1]} F > 0$$

On a alors

$$G(b) > 0 \text{ et } G(1) = - \int_0^1 F(t) dt < 0$$

car $F(1)$ est nul.

À nouveau, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

Exercice 94 : [énoncé]

On introduit F une primitive de la fonction continue f .

La fonction $x \mapsto F(x+T) - F(x)$ est constante, elle est donc de dérivée nulle et par suite $f(x+T) - f(x) = 0$.

Exercice 95 : [énoncé]

Unicité : soient F et G deux primitives solutions. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$.

$$\int_0^1 F = 0 = \int_0^1 G$$

donne alors $C = 0$ puis $F = G$.

Existence : Posons $\mathcal{F}(x) = \int_0^x f(t) dt$. La fonction

$$F: x \mapsto \mathcal{F}(x) - \int_0^1 \mathcal{F}(u) du$$

résout le problème.

Exercice 96 : [énoncé]

a) Puisque $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^x dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x f'(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

et donc

$$f(x)^2 \leq x \int_0^x f'(t)^2 dt \leq x \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

puis

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'(t)^2 dt \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

b) En reprenant ce qui précède

$$\int_0^{1/2} f(x)^2 dx \leq \int_0^{1/2} x \left(\int_0^{1/2} f'(t)^2 dt \right) dx = \frac{1}{8} \int_0^{1/2} f'(t)^2 dt$$

Sachant $f(1) = 0$, on a aussi de façon symétrique

$$\int_{1/2}^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_{1/2}^1 f'(t)^2 dt$$

et en sommant ces deux majorations, on obtient

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

Exercice 97 : [énoncé]

a) Par intégration par parties, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

b) On en déduit

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\dots 1}{(p+1)(p+2)\dots (p+q)} I_{p+q,0}$$

or

$$I_{p+q,0} = \frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$$

donc

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} (b-a)^{p+q+1}$$

Exercice 98 : [\[énoncé\]](#)

a) En appliquant le changement de variable $u = \pi/2 - t$ on obtient

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \, du$$

$t \mapsto \sin^n t$ est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < \pi/2$ donc $I_n > 0$

b) Par intégration par parties

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n+1} t \, dt = [-\cos t \sin^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t \, dt$$

donc

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^n t \, dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

puis

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

c)

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

sachant $I_0 = \pi/2$.

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

sachant $I_1 = 1$.

d) Posons $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. On

$$u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = u_n$$

et $u_0 = I_1I_0 = \pi/2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \pi/2$$

Pour tout $t \in [0; \pi/2]$,

$$\sin^{n+2} t \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$$

donc

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

e) On a

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$$

donc $I_{n+1}/I_n \rightarrow 1$. Ainsi $I_{n+1} \sim I_n$.

Par suite

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$$

et donc

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

sachant $I_n > 0$.

Exercice 99 : [\[énoncé\]](#)

a) On a

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{e}{n!} \, dx = \frac{e}{n!} \rightarrow 0$$

donc par encadrement $I_n \rightarrow 0$.

b) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \, dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

c) Pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n I_{k-1} - I_k = 1 + I_0 - I_n$$

avec

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

Exercice 100 : [énoncé]

a) $I_0 = e - 1$.

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = 1.$$

b) Par intégration par parties

$$I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx = e - (n+1)I_n$$

c) Par intégration d'une fonction continue, positive et non nulle, on a $I_n > 0$.

Puisque $I_{n+1} > 0$, on a aussi $I_n < \frac{e}{n+1}$.

d) Par encadrement $I_n \rightarrow 0$.

Puisque $I_{n+1} = e - (n+1)I_n \rightarrow 0$ on a $(n+1)I_n \rightarrow e$ puis

$$I_n \sim \frac{e}{n+1} \sim \frac{e}{n}$$

e) On a

$$D_{n+1} = (n+1)D_n$$

donc $D_n = n!D_0$.

Si $a \neq I_0$ alors $D_n \rightarrow +\infty$ puis $|u_n| \geq D_n - I_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 101 : [énoncé]

a) $f: t \mapsto \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x}$ est définie et continue sur $[0; \pi] \setminus \{x\}$.

Sachant

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

on obtient

$$f(t) = \frac{\sin \frac{n(t-x)}{2} \sin \frac{n(t+x)}{2}}{\sin \frac{t-x}{2} \sin \frac{t+x}{2}} \underset{t \rightarrow x}{\sim} n \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

On peut donc prolonger f par continuité en x ce qui assure l'existence de I_n .

b) On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t + \cos(n-1)t - (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x)}{\cos t - \cos x} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{2 \cos(nt) \cos t - 2 \cos(nx) \cos x}{\cos t - \cos x} dt \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos(nt) \cos t - \cos(nt) \cos x}{\cos t - \cos x} dt \\ &\quad + 2 \cos x \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x} dt \end{aligned}$$

enfin

$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2 \int_0^\pi \cos(nt) dt + 2 \cos x I_n = 2 \cos x I_n$$

(I_n) est une suite récurrente linéaire double d'équation caractéristique $r^2 - 2 \cos x r + 1 = 0$ de racines e^{ix} et e^{-ix} .

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \lambda \cos(nx) + \mu \sin(nx)$$

$I_0 = 0$ et $I_1 = \pi$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{\pi}{\sin x}$ d'où

$$I_n = \pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

Exercice 102 : [énoncé]

a) $u_0 = 1/2$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \pi/4$.

b) On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx$$

or la fonction

$$x \mapsto \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}$$

est continue, positive sans être la fonction nulle et $0 < 1$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

c) On a

$$|u_n - 1| = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc $u_n \rightarrow 1$.

d) Par intégration par parties

$$I_n = \int_0^1 x \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx = \left[\frac{1}{n} x \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

e) On a

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

car il est connu que $\ln(1+t) \leq t$ pour $t > -1$.

On a alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \rightarrow 0$$

donc

$$u_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 103 : [énoncé]

Par intégration par parties, on obtient pour $q \neq 0$

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

Puisque $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

Exercice 104 : [énoncé]

a) Pour $n \geq 2$, par intégration par parties (avec $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n-1} t$)

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

donc

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

b) $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$ puis

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 105 : [énoncé]

On a

$$2^n I_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

où l'on remarque que la fonction $t \mapsto 2t/(1+t^2)$ croît de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$.

Introduisons

$$J_n = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \stackrel{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$

On sait

$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

(via $nJ_n J_{n+1} = \pi/2$ et $J_n \sim J_{n+1}$, cf. intégrales de Wallis)

Montrons $2^n I_n \sim J_n$ en étudiant la différence

$$J_n - 2^n I_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

On a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \leq \int_0^1 \frac{2}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt$$

et le changement de variable $t = \tan x/2$ donne

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^n dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos x (\sin x)^n dx = \frac{1}{n+1}$$

On peut alors affirmer

$$2^n I_n - J_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis

$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

et finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n \sqrt{2n}}$$

Exercice 106 : [énoncé]

a)

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

donc $I_n \rightarrow 0$.De plus, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$\frac{x^n}{x+1} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1}$$

donc $I_n \leq I_{n+1}$.

b)

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_0$$

c) $I_0 = \ln 2$ et $(-1)^n I_n \rightarrow 0$ donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{-k}}{k} + \ln 2 \rightarrow 0$$

puis la conclusion.

d) Comme ci-dessus, $J_n \rightarrow 0$. De plus

$$J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1} + (-1)^n J_0$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4} \rightarrow 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

Exercice 107 : [\[énoncé\]](#)

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

b) Par sommation géométrique

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

$$\text{c) } \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \geq 0 \text{ par intégration d'une fonction positive sur } [0; 1].$$

$$\text{De plus } \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$$

$$\text{car } \frac{1}{1+t^2} \leq 1.$$

d) On a

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt$$

donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

car

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \rightarrow 0$$

Exercice 108 : [\[énoncé\]](#)

$$\text{a) } \int \frac{x^5}{1+x^{12}} dx = \int_{u=x^6} \frac{1}{6} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{6} \arctan x^6 + C^{te} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} dx = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C^{te} \text{ sur }]-\infty; -1[;]-1; 0[;]0; 1[\text{ ou }]1; +\infty[.$$

$$\text{c) } \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{d) } \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1) + C^{te} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{e) } \int \frac{x}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)-2}{(x+1)^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + C^{te} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{f) } \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C^{te} \text{ sur }]-\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[.$$

- g) $\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} dx =$
 $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $]-\infty; -1[$ ou
 $]-1; +\infty[$.
- h) $\int \frac{x dx}{x^3-1} = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C^{te}$ sur $]-\infty; 1[$
ou $]1; +\infty[$.
- i) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1} dx = \int 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \arctan x + C^{te}$
sur $]-\infty; -1[,]-1; 1[$ ou $]1; +\infty[$.
- j) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1} dx = \int \frac{1}{2} \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2-x+1} dx$ puis
 $\int \frac{1}{x^4+x^2+1} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
- k) $\frac{1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-1/3}{(x-j)^2} + \frac{-1/3}{(x-j^2)^2} + \frac{2/3}{x^2+x+1}$ donc
 $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}$.
- l) $\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{-\sqrt{2}x+2}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx$ donc
 $\int \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x+1) + C^{te}$
sur $\mathbb{R}$.

Exercice 109 : [énoncé]

- a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
- b) $\int_0^1 \frac{x}{x^3+1} dx = \left[\frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
- c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{\arctan x}{x+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$
 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{-x+1}{x^2+1}$ donc
 $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + C^{te}$
puis $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{8} = \frac{\ln 2}{4}$.

Exercice 110 : [énoncé]

- a) f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une unique primitive
s'annulant :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

- b) Immédiatement

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

- c) Par le changement de variable

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\arctan x} \frac{d\theta}{1+\tan^2 \theta} = \int_0^{\arctan x} \cos^2 \theta d\theta$$

puis

$$F_2(x) = \frac{1}{4} \sin 2 \arctan x + \frac{1}{2} \arctan x$$

et donc

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x$$

- d) Astucieusement

$$F_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = F_n(x) - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

puis par intégration par parties :

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) + \left[\frac{1}{2n} \frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^x - \frac{1}{2n} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

et donc

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} F_n(x)$$

- e) En particulier

$$F_3(x) = \frac{1}{4} \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \arctan x$$

Exercice 111 : [énoncé]

- a) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int 1 - \frac{e^x}{e^x+1} dx = x - \ln(e^x+1) + C^{te}.$$

- b) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x} \stackrel{u=e^x}{=} \int \frac{du}{u^2(u+1)}$$

$$= -\ln|u| + \ln|u+1| - \frac{1}{u} + C^{te} = -x + \ln(e^x+1) - e^{-x} + C^{te}.$$

c) Sur $[0; +\infty[$,

$$\int \sqrt{e^x - 1} \, dx \underset{t=\sqrt{e^x-1}}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+1} \, dt = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan \sqrt{e^x-1} + C^{te}.$$

d) Sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &\underset{u=\sqrt{1+e^{2x}}}{=} \int \frac{du}{u^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} + C^{te} = \ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1) - x + C^{te}. \end{aligned}$$

Exercice 112 : [énoncé]

Par le changement de variable $u = \sqrt{e^x+1}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2 \, du}{u^2-1} = \left[\ln \frac{u-1}{u+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} = \ln \frac{(\sqrt{e+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{e+1}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

Exercice 113 : [énoncé]

a) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} \, dx \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{u+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-\sqrt{2}} \, du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sin x + \sqrt{2}}{\sin x - \sqrt{2}} \right| + C^{te}$$

b) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} \, dx \underset{u=\cos x}{=} \int -\frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\cos x - \sqrt{2}}{\cos x + \sqrt{2}} \right| + C^{te}$$

c) Sur $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \underset{u=\tan x}{=} \int \frac{1}{1+u^2} \, du = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C^{te}$$

d) Sur $I_k =]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos(x) \, dx}{(1-\sin^2(x))^2} \underset{t=\sin x}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \, dt$$

donc

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C^{te}$$

Exercice 114 : [énoncé]

Sur $I_k =]-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int \frac{dx}{3+\cos x} \underset{t=\tan x/2}{=} \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C^{te}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, cherchons F primitive de celle-ci sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, F est primitive sur I_k , donc il existe $C_k \in \mathbb{R}$ tel que sur I_k ,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + C_k$$

Par limite à droite et à gauche en $\pi + 2k\pi$,

$$F(\pi + 2k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_k = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k+1}$$

Par suite

$$\forall k \in \mathbb{Z}, C_k = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0$$

On peut résumer :

$$C_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x/2}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + C_0 & \text{si } x \in I_k \\ \frac{2k+1}{2\sqrt{2}}\pi + C_0 & \text{si } x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Ceci détermine la fonction F à une constante près.

Inversement, étant assuré de l'existence de F , on peut affirmer que de telles fonctions sont bien primitives de $x \mapsto \frac{1}{3+\cos x}$.

Exercice 115 : [énoncé]

L'intégrale est bien définie et détermine la primitive s'annulant en 0 de la fonction continue

$$x \mapsto \frac{1}{3+\cos^2 x}$$

Notons F cette primitive.

Pour calculer, l'intégrale on est tenté de procéder au changement de variable $u = \tan t$ mais celui-ci n'est possible que pour $x \in]-\pi/2; \pi/2[$ et alors

$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{du}{(4+3u^2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x \right)$$

Par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \text{ et } F(-\pi/2) = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

Puisque la fonction intégrée est π -périodique, on a

$$F(x + \pi) - F(x) = C^{te}$$

avec

$$C^{te} = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

On peut alors calculer $F(x)$ en commençant par déterminer $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x + k\pi \in]-\pi/2; \pi/2]$$

puis en exploitant

$$F(x) = F(x + k\pi) - \frac{k\pi}{2\sqrt{3}}$$

avec

$$F(x + k\pi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x\right)$$

Exercice 116 : [énoncé]

- a) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} \underset{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int_0^1 \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$
 b) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin x \cos x} \underset{t=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$
 c) Par la relation de Chasles

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

Via des changements de variable affines adéquates :

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

Sur $]-\pi/2; \pi/2[$,

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \underset{t=\tan x}{=} \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

Soit F une primitive de $\frac{1}{1+\cos^2 x}$ sur $[0; \pi/2]$.

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$ sur $[0; \pi/2[$ et par continuité

$$F(\pi/2) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C$$

Finalement $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = [F(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ puis $I = \sqrt{2}\pi$.

Exercice 117 : [énoncé]

Par le changement de variable $t = \tan x/2$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha \cos x} dx &= \int_0^1 \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2 \sin \alpha}{(1+\cos \alpha) + (1-\cos \alpha)t^2} dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha \cos x} dx &= \frac{2 \sin \alpha}{1-\cos \alpha} \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \left[\arctan \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} t \right]_0^1 \\ &= \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}} \arctan \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \end{aligned}$$

et finalement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha \cos x} dx = 2 \arctan \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha/2}{\cos^2 \alpha/2}} = \alpha$$

Exercice 118 : [énoncé]

- a) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\text{th } x}{1+\text{ch } x} dx \underset{u=\text{ch } x}{=} \int \frac{du}{u(1+u)} = \ln \text{ch } x - \ln(\text{ch } x + 1) + C^{te}.$
 b) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\text{ch } x}{1+\text{ch}^2 x} dx \underset{u=\text{sh } x}{=} \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\text{sh } x}{\sqrt{2}} + C^{te}.$
 c) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{\text{ch } x dx}{\text{sh } x + \text{ch } x} \underset{u=\text{th } x}{=} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\text{th } x + 1}{\text{th } x - 1} \right| - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\text{th } x} + C^{te}$
 ou encore $\int \frac{\text{ch } x dx}{\text{sh } x + \text{ch } x} = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4e^{2x}} + C^{te}.$
 d) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{dx}{\text{ch}^3 x} = \int \frac{\text{ch } x}{(1+\text{sh}^2 x)^2} dt \underset{t=\text{sh } x}{=} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \arctan \text{sh } x + \frac{1}{2} \frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} + C^{te}$

Exercice 119 : [énoncé]

Par changement de variable

$$\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x} \underset{t=e^x}{=} \int_1^e \frac{2 dt}{t^2 + 1} = 2 \arctan e - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 120 : [énoncé]

- a) Sur $[-1; +\infty[$,
 $\int \frac{x dx}{1+\sqrt{x+1}} \underset{u=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2u(u^2-1)}{1+u} du = \int 2u(u-1) du = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - x + C^{te}.$
- b) Sur $[0; +\infty[$, $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \underset{u=\sqrt{x}}{=} \int 2u \frac{1-u}{1+u} du = 2 \int -u + 2 - \frac{2}{1+u} du =$
 $-x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C^{te}.$
- c) Sur $]-\infty; 1]$ ou $]2; +\infty[$,
 $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} dx = \int \frac{-2y^2 dy}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + C^{te}$
donc $\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} dx = \sqrt{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{|x-1|} - \sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x-2|}} + C^{te}.$

Exercice 121 : [énoncé]

- a) Sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{2-x^2}} dx \underset{x=\sqrt{2} \sin t}{=} \int \sqrt{2} \sin t + 1 dt = -\sqrt{2} \cos t + t + C^{te} =$
 $-\sqrt{2-x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + C^{te}.$
- b) Sur $]1; 3[$,
 $\int \frac{x dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \underset{x=2+\sin t}{=} \int 2 + \sin t dt = 2 \arcsin(x-2) - \sqrt{(x-1)(3-x)} + C^{te}.$
- c) $x - x^2 + 6 = -(x-3)(x+2)$, $x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \sin t$. Sur $[-2; 3]$,
 $\int \sqrt{x - x^2 + 6} dx = \int \frac{25}{4} \cos^2 t dt = \frac{25}{8} \int \cos 2t + 1 dt =$
 $\frac{2x-1}{4} \sqrt{x - x^2 + 6} + \frac{25}{8} \arcsin \frac{2x-1}{5} + C^{te}$
- d) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx \underset{x=\operatorname{sh} t}{=} \int \operatorname{sh} t + 1 dt = \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C^{te}.$
- e) Sur $\mathbb{R}$, $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}} \underset{x=\operatorname{sh} t}{=} \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t} = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} dt =$
 $\frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4} \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} + C^{te}.$
- f) Sur $[1; +\infty[$ (et de même sur $]-\infty; -1]$)
 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx \underset{x=\operatorname{ch} t}{=} \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t} dt \underset{u=\operatorname{sh} t}{=} \int \frac{u^2}{1+u^2} du = \sqrt{x^2-1} - \arctan \sqrt{x^2-1} + C^{te}.$

Exercice 122 : [énoncé]

On écrit le trinôme sous forme canonique

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ce qui invite au changement de variable

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} t, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt$$

qui donne

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3} \operatorname{sh} t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{ch}^2 t - 1} \underset{u=\operatorname{ch} t}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{u^2 - 1}$$

et enfin

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{3}} + C^{te}$$

Exercice 123 : [énoncé]

- a) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x(x+3)}} \underset{t=\sqrt{x}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2 dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$
- b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(x+4)} \underset{t=\sqrt{x+1}}{=} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2 dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$
- c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \underset{u=\sqrt{1+x}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2u du}{u+\sqrt{2-u^2}} \underset{u=\sqrt{2} \sin \theta}{=} 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta.$
 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2} \int_0^1 \frac{4t(1-t^2) dt}{(-t^2+2t+1)(1+t^2)^2} =$
 $2\sqrt{2} \int_0^1 -\frac{1}{1+t^2} + 2 \frac{1+t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{t^2-2t-1} dt$
Au final $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{2} - 2 \ln(\sqrt{2} + 1).$