

Nombres réels et complexes

Rationnels et irrationnels

Exercice 1 [02092] [Correction]

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 2 [02093] [Correction]

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 3 [02094] [Correction]

Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. En déduire l'existence d'irrationnels $a, b > 0$ tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 [02095] [Correction]

Soit $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

- On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.
- Calculer $f(0)$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.
- Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
- On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 5 [02472] [Correction]

Montrer que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 6 [02475] [Correction]

Si n est un entier ≥ 2 , le rationnel $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ peut-il être entier ?

Exercice 7 [02647] [Correction]

- Montrer l'existence et l'unicité des suites d'entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

- Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 [01975] [Correction]

[Irrationalité de π]

- Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.

- Établir la même propriété en $x = a/b$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi P_n(t) \sin t \, dt$$

Montrer que $I_n \rightarrow 0$.

- En supposant $\pi = a/b$, montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 9 [03668] [Correction]

[Irrationalité de e^r pour $r \in \mathbb{Q}^*$]

- Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (bx - a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.

- b) Établir la même propriété en $x = a/b$
 c) On pose $r = a/b$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^r P_n(t) e^t dt$$

Montrer que $I_n \rightarrow 0$.

- d) En supposant $e^r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $qI_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Les nombres réels

Exercice 10 [02098] [Correction]

Soit $a \in [1; +\infty[$. Simplifier

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$

Exercice 11 [02099] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y);$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y);$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

- a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
 b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
 c) Démontrer que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
 d) Conclure que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 [03404] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = 1$.

Inégalités

Exercice 13 [03983] [Correction]

Vérifier

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(1-x) \leq 1/4$$

Exercice 14 [02096] [Correction]

Montrer

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Exercice 15 [03643] [Correction]

Soient $x, y \in [0; 1]$. Montrer

$$x^2 + y^2 - xy \leq 1$$

Exercice 16 [02097] [Correction]

Montrer

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 17 [03224] [Correction]

Montrer

$$\forall u, v \geq 0, 1 + \sqrt{uv} \leq \sqrt{1+u}\sqrt{1+v}$$

Exercice 18 [03405] [Correction]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$ des réels.

Établir

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Exercice 19 [01733] [Correction]

Déterminer tous les couples $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ pour lesquels il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y > 0, x^\alpha y^\beta \leq M(x+y)$$

Exercice 20 [03640] [\[Correction\]](#)

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ deux suites réelles monotones. Comparer

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Exercice 21 [04017] [\[Correction\]](#)

Montrer que

$$\forall x, y \in [0; 1], \min \{xy, (1-x)(1-y)\} \leq \frac{1}{4}$$

Partie entière

Exercice 22 [02100] [\[Correction\]](#)

Montrer que la fonction partie entière est croissante.

Exercice 23 [02101] [\[Correction\]](#)

Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 24 [02102] [\[Correction\]](#)

Montrer

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 25 [02103] [\[Correction\]](#)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Exercice 26 [02104] [\[Correction\]](#)

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 27 [02105] [\[Correction\]](#)

Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Établir

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

Exercice 28 [02106] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2 = a_n^2 - 1$$

b) Montrer que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 29 [03416] [\[Correction\]](#)

Démontrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

en notant $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x .

Les nombres complexes

Exercice 30 [02025] [\[Correction\]](#)

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 31 [02026] [\[Correction\]](#)

Soient $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $f: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

a) Montrer que tout élément de P a son image par f dans D .

b) Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P .

Exercice 32 [02028] [\[Correction\]](#)

Calculer pour $\theta \in]0; 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

Exercice 33 [02029] [\[Correction\]](#)

Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 34 [03107] [\[Correction\]](#)

Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.

On suppose que si $z \in B$ alors $1 - z + z^2 \in B$ et $1 + z + z^2 \in B$.

Déterminer B .

Exercice 35 [03651] [\[Correction\]](#)

Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

Le plan complexe

Exercice 36 [03458] [\[Correction\]](#)

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|z_0| \neq r$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r .

a) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$z \in \mathcal{C} \iff |z|^2 - z_0 \bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

b) En déduire que l'image de $\mathcal{C}$ par l'application $f: z \mapsto 1/z$ est un cercle dont on précisera centre et rayon en fonction de z_0 et r .

Exercice 37 [02027] [\[Correction\]](#)

a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz .

b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 38 [03040] [\[Correction\]](#)

Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 39 [02050] [\[Correction\]](#)

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|$$

Exercice 40 [03880] [\[Correction\]](#)

Soient a, b, c des réels strictement positifs.

À quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2$$

Module et argument

Exercice 41 [02030] [\[Correction\]](#)

Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Exercice 42 [02031] [\[Correction\]](#)

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$$

Exercice 43 [02032] [\[Correction\]](#)

Établir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 44 [02356] [\[Correction\]](#)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 45 [00055] [\[Correction\]](#)

Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$$

Exercice 46 [03642] [\[Correction\]](#)

a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leq \sqrt{2}$$

Exercice 47 [03249] [\[Correction\]](#)

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}$$

Déterminer les valeurs prises par f .

Exercice 48 [02052] [\[Correction\]](#)

Résoudre l'équation $|z+1| = |z|+1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Racines de l'unité

Exercice 49 [02036] [\[Correction\]](#)

Calculer le produit des n -ième racines de l'unité

Exercice 50 [02037] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité.

Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z-1|$$

Exercice 51 [03353] [\[Correction\]](#)

Soient $n \geq 3$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n -ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.

a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{i=1}^n \omega_i^p$$

b) Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_i}$$

Exercice 52 [02038] [\[Correction\]](#)

Soit ω une racine n ème de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S .

Exercice 53 [02039] [\[Correction\]](#)

Simplifier :

a) $j(j+1)$

b) $\frac{j}{j^2+1}$

c) $\frac{j+1}{j-1}$

Exercice 54 [02040] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 55 [02041] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n + 1 = 0$$

Exercice 56 [02042] [\[Correction\]](#)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z + i)^n = (z - i)^n$$

Observer que celle-ci admet exactement $n - 1$ solutions, chacune réelle.

Exercice 57 [02043] [\[Correction\]](#)

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 58 [02044] [\[Correction\]](#)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

a) Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 59 [02531] [\[Correction\]](#)

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

Equations algébriques

Exercice 60 [02045] [\[Correction\]](#)

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ? Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 61 [02046] [\[Correction\]](#)

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ b) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Exercice 62 [02047] [\[Correction\]](#)

a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12i$.

b) Résoudre l'équation $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.

c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 63 [02049] [\[Correction\]](#)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$$

Exercice 64 [02048] [\[Correction\]](#)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

Exponentielle complexe

Exercice 65 [02051] [\[Correction\]](#)

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $e^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 66 [03457] [\[Correction\]](#)

En étudiant module et argument, établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow \exp(z)$$

Exponentielles imaginaires

Exercice 67 [02033] [\[Correction\]](#)

Déterminer module et argument de $e^{i\theta} + 1$ et de $e^{i\theta} - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 68 [02034] [\[Correction\]](#)

Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in]-\pi; \pi[$.

Exercice 69 [02035] [\[Correction\]](#)

Déterminer module et argument de $e^{i\cdot\theta} + e^{i\cdot\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 70 [02646] [\[Correction\]](#)

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$$

montrer

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Soit x un rationnel et y un irrationnel.

Par l'absurde : Si $z = x + y$ est rationnel alors $y = z - x$ est rationnel par différence de deux nombres rationnels. Or y est irrationnel. Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]

Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et, quitte à simplifier, p et q non tous les deux pairs.

On a alors $2q^2 = p^2$.

p est alors nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.

Mais alors q est pair. Par suite p et q sont tous les deux pairs.

Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, c'est gagné avec $a = b = \sqrt{2}$. Sinon, on prend $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Exercice 4 : [énoncé]

- La relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.
- Pour $x = y = 0$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.
- Pour $y = -x$, la relation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ donne $0 = f(-x) + f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.
- Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$$

- On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$f(x) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right)$$

or

$$a = f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

donc

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$$

puis

$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax$$

Exercice 5 : [énoncé]

On définit le nombre x étudié

$$x := (2/3 + 41/81 \sqrt{5/3})^{1/3} + (2/3 - 41/81 \sqrt{5/3})^{1/3};$$

Attention à définir les racines cubiques par des exposants $1/3$ avec parenthèses.

On peut commencer par estimer la valeur cherchée

`evalf(x);`

Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3

`expand(x^3);`

Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Simplifions ce terme

`simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);`

On obtient

$$\frac{1}{81} \left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3} \left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}$$

Développons selon $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$(486^2 - 123^2 \cdot 15)^{1/3};$$

donne 9261. Enfin

`ifactor(9261);`

permet de conclure que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}$$

Ainsi x est solution de l'équation

$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x$$

En factorisant le polynôme sous-jacent

factor(x^3-7/9*x-4/3);

on obtient

$$(3x - 4)(3x^2 + 4x + 3) = 0$$

Puisque $3x^2 + 4x + 3 > 0$, on peut conclure

$$x = 4/3$$

Exercice 6 : [\[énoncé\]](#)

Le calcul des premiers termes de la suite $(H_n)_{n \geq 2}$ permet de conjecturer que H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair. Ceci assurera $H_n \notin \mathbb{Z}$.

Démontrons la propriété conjecturée par récurrence forte.

Pour $n = 2$, c'est immédiat.

Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n - 1 \geq 2$.

Cas n impair.

On peut écrire $n = 2k + 1$ et puisque par hypothèse de récurrence H_{n-1} s'écrit $(2p + 1)/2q$, on obtient $H_n = H_{n-1} + 1/n$ égale au rapport d'un entier impair par un entier pair.

Cas n est pair.

On peut écrire $n = 2k$ avec $k \geq 2$ puis

$$H_n = \frac{1}{2}H_k + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$$

Par hypothèse de récurrence, H_k est le rapport d'un entier impair par un entier pair, donc $\frac{1}{2}H_k$ aussi.

De plus, comme entrevu dans l'étude du cas précédent, l'ajout de l'inverse d'un entier impair conserve la propriété.

Ainsi H_n est le rapport d'un entier impair par un entier pair.

Récurrence établie.

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

a) Par la formule du binôme de Newton

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impaires

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

avec les entiers

$$a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^p \text{ et } b_n = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq n} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

On peut aussi raisonner par récurrence en mettant à jour une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

L'unicité provient de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. En effet si

$$(1 + \sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$$

avec a, b, a', b' entiers, on obtient

$$(b' - b)\sqrt{2} = a - a'$$

Si $b \neq b'$ alors on peut exprimer $\sqrt{2}$ comme égal à un nombre rationnel. C'est absurde et il reste $b = b'$ et donc $a = a'$.

b) Par la formule du binôme de Newton, on obtient de même

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}b_n$$

et alors

$$a_n^2 - 2b_n^2 = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n$$

On peut aussi raisonner par récurrence en exploitant l'expression de (a_{n+1}, b_{n+1}) en fonction de (a_n, b_n) .

c) L'unicité est évidente compte tenu de la stricte croissance de la fonction $p \mapsto \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$.

Si n est pair alors $a_n^2 = 1 + 2b_n^2$. Pour $p = a_n^2$,

$$(\sqrt{2} + 1)^n = a_n + \sqrt{2}b_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Si n est impair alors $2b_n^2 = a_n^2 + 1$. Pour $p = 2b_n^2$,

$$(\sqrt{2} + 1)^n = \sqrt{2}b_n + a_n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leq m \leq 2n$.

En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m , on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{m-n} (-a)^{2n-m} b^{m-n} (n+m)! \in \mathbb{Z}$$

b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^\pi t^n (bt - a)^n \sin t \, dt \right| \leq \frac{1}{n!} \pi^{n+1} (|b| \pi + |a|)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d) Par l'absurde, supposons $\pi = a/b$.

Par intégration par parties successives

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sin(t + k\pi/2) P_n^{(k-1)}(t) \right]_0^\pi + (-1)^m \int_0^\pi \sin(t + m\pi/2) P_n^{(m)}(t) \, dt$$

Donc

$$I_n = \left[\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} \sin(t + k\pi/2) P_n^{(k-1)}(t) \right]_0^\pi = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \sin(k\pi/2) (P_n^{(k-1)}(\pi) + P_n^{(k-1)}(0)) \in \mathbb{Z}$$

Comme $I_n \in \mathbb{Z}$ et $I_n \rightarrow 0$, la suite (I_n) est stationnaire égale à 0.

Or sur $[0; \pi]$ la fonction $t \mapsto P_n(t) \sin(t)$ est continue, de signe constant, sans être nulle et $0 < \pi$ donc $I_n > 0$. Absurde.

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0$$

Reste à traiter le cas $n \leq m \leq 2n$. En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} b^k x^{n+k}$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m , on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{m-n} (-a)^{2n-m} b^{m-n} (n+m)! \in \mathbb{Z}$$

b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$$

c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^r t^n (bt - a)^n e^t \, dt \right| \leq \frac{1}{n!} r^{n+1} (br + a)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d) Par intégration par parties

$$I_n = [P_n(t) e^t]_0^r - \int_0^r P_n'(t) e^t \, dt$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[\sum_{m=0}^{2n} (-1)^m P_n^{(m)}(t) e^t \right]_0^r$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \left(P_n^{(m)}(r) p - P_n^{(m)}(0) q \right) \in \mathbb{Z}$$

Or sur $[0; r]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)e^t$ est continue, positive sans être nulle et $0 < r$ donc $I_n > 0$.

Ainsi $qI_n \rightarrow 0$, $qI_n > 0$ et $qI_n \in \mathbb{Z}$: c'est absurde.

Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de $\ln r$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+*} \setminus \{1\}$.

Exercice 10 : [énoncé]

Posons

$$x = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$

On a

$$x^2 = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4(a-1)} = 2a + 2\sqrt{(a-2)^2}$$

Si $a \in [1; 2]$ alors $x^2 = 2a + 2(2-a) = 4$ donc $x = 2$.

Si $a \in [2; +\infty[$ alors $x^2 = 4(a-1)$ puis $x = 2\sqrt{a-1}$.

Exercice 11 : [énoncé]

a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1.x) = f(1)f(x)$$

Comme f est non nulle, on a $f(1) = 1$.

$f(1) + f(-1) = f(0) = 0$ donc $f(-1) = -1$.

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = n$.

De plus

$$f(-n) = f((-1) \times n) = f(-1) \times f(n) = -f(n) = -n$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x$$

Pour $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = f(p) \times f(\frac{1}{q})$$

Or $f(p) = p$ et

$$1 = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = f(q) \times f(\frac{1}{q}) = q \times f(\frac{1}{q})$$

donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Par suite $f(x) = x$.

c)

$$\forall x \geq 0, f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors

$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y - x) \geq f(x)$$

Ainsi f est croissante.

d) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

Comme f est croissante :

$$f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) \leq f(x) < f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right)$$

puis

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq f(x) < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

À la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $x \leq f(x) \leq x$ i.e. $f(x) = x$.

Finalement, $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 12 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n 1 = 0$$

et puisqu'une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité est nulle, on obtient

$$\forall 1 \leq k \leq n, x_k = 1$$

Exercice 13 : [énoncé]

On peut dresser le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto x(1-x)$ et constater qu'elle possède un maximum en $x = 1/2$ de valeur $f(1/2) = 1/4$.

Exercice 14 : [énoncé]

$(a-b)^2 \geq 0$ donne $2ab \leq a^2 + b^2$

Exercice 15 : [énoncé]

Sachant $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$, on a

$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = (x-1)(1-y) \leq 0$$

Exercice 16 : [énoncé]

Sachant

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

on obtient

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}(c^2 + a^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice 17 : [énoncé]

Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir

$$(1 + \sqrt{uv})^2 \leq (1+u)(1+v)$$

soit encore

$$2\sqrt{uv} \leq u + v$$

ce qui découle de la propriété

$$(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geq 0$$

Exercice 18 : [énoncé]

Par somme de quantités positives, on a

$$\sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (a_k - a_\ell)(b_k - b_\ell) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (a_k b_k - a_\ell b_k - a_k b_\ell + a_\ell b_\ell) \geq 0$$

En séparant la somme en quatre, on obtient

$$n \sum_{k=1}^n a_k b_k - 2 \sum_{k=1}^n a_k \sum_{\ell=1}^n b_\ell + n \sum_{\ell=1}^n a_\ell b_\ell \geq 0$$

et on en déduit

$$n \sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$$

ce qui donne l'inégalité demandée.

Exercice 19 : [énoncé]

Soit (α, β) solution. Considérons

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x + y}$$

sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

On a

$$f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$

f bornée implique $\alpha + \beta = 1$.

Inversement, supposons $\alpha + \beta = 1$.

Si $y \geq x$ alors

$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x + y} \leq \frac{y}{x + y} \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \leq 1$$

Si $x \geq y$ alors idem.

Exercice 20 : [énoncé]

Étudions la différence

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n n x_k y_k - \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k y_\ell\right)$$

ce qui donne encore

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell)$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} x_k (y_k - y_\ell) + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} x_k (y_k - y_\ell)$$

car lorsque $k = \ell$ le terme $x_k (y_k - y_\ell)$ est nul.

Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} x_\ell (y_\ell - y_k)$$

et alors

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{1 \leq \ell < k \leq n} (x_k - x_\ell) (y_k - y_\ell)$$

Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.

Au final, si les deux suites ont même monotonie alors

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k\right)$$

Exercice 21 : [énoncé]

Commençons par résoudre le min. On a

$$xy \leq (1-x)(1-y) \iff x+y \leq 1$$

Cas $x+y \leq 1$:

$$\min \{xy, (1-x)(1-y)\} = xy \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

Cas $x+y > 1$:

$$\min \{xy, (1-x)(1-y)\} = (1-x)(1-y) < (1-x)x \leq 1/4$$

Exercice 22 : [énoncé]

Soit $x \leq y \in \mathbb{R}$. $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\lfloor x \rfloor \leq y$ or $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ car $\lfloor y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à y .

Exercice 23 : [énoncé]

Puisque $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$, on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$$

Par définition, $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x+y$, on a donc déjà

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$$

D'autre part $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc

$$x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

puis

$$\lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

Puisque cette inégalité concerne des entiers, on peut transformer cette inégalité stricte en l'inégalité large suivante

$$\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Exercice 24 : [énoncé]

Si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/2$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1/2$ alors

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

puis relation voulue.

Si $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1/2$ alors

$$\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1, \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor$$

puis la relation voulue

Si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1/2$ et $\lfloor y \rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$: analogue

Si $\lfloor x \rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ alors

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2, \lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$$

puis la relation voulue.

Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

Exercice 25 : [énoncé]

On a $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ puis $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$, or $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante donc

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor$$

$\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ puis $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$ car $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$.

Par suite

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

puis

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

et finalement

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

Exercice 26 : [énoncé]

Posons $m = \lfloor nx \rfloor$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n - 1$.

On a $nq + r \leq nx < nq + r + 1$ donc pour tout $k \in \{0, \dots, n - 1\}$:

$$q + \frac{k + r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k + r + 1}{n}$$

Si $k + r < n$ alors $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q$ et si $k + r \geq n$ alors $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = q + 1$.

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = nq + r = m = \lfloor nx \rfloor$$

Exercice 27 : [énoncé]

Si $a \notin \mathbb{Z}$ alors $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{\lfloor a \rfloor + 1, \lfloor a \rfloor + 2, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ donc

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$$

Or

$$\lfloor 1 - a \rfloor = 1 + \lfloor -a \rfloor = -\lfloor a \rfloor$$

car $a \notin \mathbb{Z}$ donc

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $[a; b] \cap \mathbb{Z} = \{a, a + 1, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ donc

$$\text{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor - a + 1 = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$$

car $1 - a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 28 : [énoncé]

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent.

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1$$

Récurrence établie.

b) $a_n - 1 \leq b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \leq (2 + \sqrt{3})^n < 2a_n$ donc

$$\left\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$$

C'est un entier impair.

Exercice 29 : [énoncé]

Soit p un entier strictement supérieur à $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$. On a

$$2n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n} < p^2$$

donc

$$4(n^2 + n) < (p^2 - (2n + 1))^2$$

Puisque les nombres comparés sont des entiers, on a aussi

$$4(n^2 + n) + 1 \leq (p^2 - (2n + 1))^2$$

c'est-à-dire

$$(2n + 1)^2 \leq (p^2 - (2n + 1))^2$$

et on en déduit

$$4n + 2 \leq p^2$$

Or le carré d'un entier ne peut qu'être congru à 0 ou 1 modulo 4. On en déduit

$$4n + 2 < p^2$$

et donc

$$\sqrt{4n + 2} < p$$

Ainsi, il n'existe pas d'entiers compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n + 2}$ donc

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n + 2} \right\rfloor$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $z \in \mathbb{U}$, on a $\bar{z} = 1/z$ donc

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{1/z+1}{1/z-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$$

puis

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

Exercice 31 : [\[énoncé\]](#)

a) Posons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}$$

Si $y > 0$ alors $x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$ donc $|f(z)| < 1$. Ainsi,

$$\forall z \in P, f(z) \in D$$

b) Soit $Z \in D$.

$$Z = \frac{z-i}{z+i} \iff z = i \frac{1+Z}{1-Z}$$

avec

$$i \frac{1+Z}{1-Z} = i \frac{1+Z-\bar{Z}-Z\bar{Z}}{|1-Z|^2} = -\frac{2\operatorname{Im}(Z)}{|1-Z|^2} + i \frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} \in P$$

Ainsi,

$$\forall Z \in D, \exists ! z \in P, f(z) = Z$$

Exercice 32 : [\[énoncé\]](#)

C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{in\theta/2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$C_n = \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \sin \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Exercice 33 : [\[énoncé\]](#)

C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = (1 + e^{i\theta})^n = 2^n e^{i\frac{n\theta}{2}} \cos^n \frac{\theta}{2}$$

Ainsi

$$C_n = 2^n \cos \frac{n\theta}{2} \cos^n \frac{\theta}{2} \text{ et } S_n = 2^n \sin \frac{n\theta}{2} \cos^n \frac{\theta}{2}$$

Exercice 34 : [\[énoncé\]](#)

On observe que $B = \{i, -i\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...

Posons $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) = 1 - z + z^2 \text{ et } g(z) = 1 + z + z^2$$

On remarque

$$|f(z) - i| = |z + i| |z - (1 + i)|, |f(z) + i| = |z - i| |z - (1 - i)|$$

$$|g(z) - i| = |z - i| |z + 1 + i| \text{ et } |g(z) + i| = |z + i| |z + 1 - i|$$

Soient $a \in B$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$z_{n+1} = \begin{cases} f(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) \leq 0 \\ g(z_n) & \text{si } \operatorname{Re}(z_n) > 0 \end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n = |z_n^2 + 1| = |z_n - i| |z_n + i|$$

Si $\operatorname{Re}(z_n) \leq 0$ alors

$$u_{n+1} = |f(z_n) - i| |f(z_n) + i| = u_n |z_n - (1 + i)| |z_n - (1 - i)|$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n , l'un au moins des deux modules $|z_n - (1 + i)|$ et $|z_n - (1 - i)|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1. Ainsi

$$u_{n+1} \geq \sqrt{2} u_n$$

Si $\operatorname{Re}(z_n) > 0$, on obtient le même résultat.

On en déduit que si $u_0 \neq 0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0 = 0$ puis $a = \pm i$. Ainsi $B \subset \{i, -i\}$.

Sachant $B \neq \emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-i$ et inversement, on peut conclure

$$B = \{i, -i\}$$

Exercice 35 : [énoncé]

Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u = \bar{u}$.

On a alors

$$(z-a)^2 = (z-a) \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}} \right) = \frac{(z-a)(\bar{a} - \bar{z})}{\bar{a}\bar{z}} = -a \frac{|z-a|^2}{\bar{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a} \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^2 = \frac{|z-a|^2}{|z-b|^2} \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 36 : [énoncé]

a) On a

$$z \in \mathcal{C} \iff |z - z_0|^2 = r^2$$

et en développant

$$|z - z_0|^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + z_0\bar{z}_0$$

b) Notons que $0 \notin \mathcal{C}$ puisque $|z_0| \neq r$. On peut donc considérer l'image $f(\mathcal{C})$.

Soit $Z = f(z)$ avec $z \in \mathcal{C}$. Puisque

$$|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2 = r^2$$

on a

$$1 - \frac{z_0}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} + \frac{|z_0|^2 - r^2}{z\bar{z}} = 0$$

donc

$$1 - z_0Z - \bar{z}_0\bar{Z} + (|z_0|^2 - r^2)|Z|^2 = 0$$

ce qui se réécrit

$$|Z|^2 - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2}Z - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}\bar{Z} = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2}$$

Posons alors

$$Z_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$$

et l'on obtient

$$|Z|^2 - \bar{Z}_0Z - Z_0\bar{Z} + |Z_0|^2 = \frac{1}{r^2 - |z_0|^2} + \frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2} = \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2}$$

Ainsi Z appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre Z_0 et de rayon $\frac{r}{|z_0|^2 - r^2}$.

Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on obtient que tout point Z de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un certain z de $\mathcal{C}$.

Exercice 37 : [énoncé]

a) $M = I$ est solution.

Pour $M \neq I$, I, M, M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda \overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{iz-i}{z-i} \in \mathbb{R}$.

Posons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 \iff x(x-1) + y(y-1) = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega \left| \begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega' \left| \begin{matrix} -1/2 \\ 1/2 \end{matrix} \right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

Exercice 38 : [énoncé]

Soit z un complexe du cercle unité avec $z \neq 1$. Il existe $\theta \in]0; 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.

On a alors

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{i\theta}} = e^{-i\theta/2} \frac{i}{2 \sin \theta/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \cot \frac{\theta}{2}$$

Quand θ parcourt $]0; 2\pi[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\cot(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x = 1/2$.

Exercice 39 : [énoncé]

Soit $M(z)$ solution avec $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

On a $2a = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $a \geq 0$ et $b = \pm\sqrt{3}a$.

Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs $\vec{u} \left| \begin{matrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right.$ et

$$\vec{v} \left| \begin{matrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{matrix} \right.$$

Inversement : ok.

Exercice 40 : [énoncé]

En multipliant les trois complexes t, u, v par $e^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}_+$ auquel cas $t = a$.

En écrivant $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne

$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$

et les deux conditions $u\bar{u} = b^2$ et $v\bar{v} = c^2$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c . Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b - c| \leq a \leq b + c$$

On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 41 : [énoncé]

$|z|^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$ donc $|z| = 2$.

Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0; \pi/2]$ car $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \geq 0$.

On a $\cos \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ donc

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec $2\theta \in [0; \pi]$ donc $2\theta = \pi/4$ puis $\theta = \pi/8$.

Exercice 42 : [énoncé]

($\Leftarrow$) ok

($\Rightarrow$) Si $|z + z'| = |z| + |z'|$ alors, en divisant par $|z| : |1 + x| = 1 + |x|$ avec $x = z'/z \in \mathbb{C}$.

Écrivons $x = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|1 + x|^2 = (a + 1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$

et

$$(1 + |x|)^2 = (1 + \sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$|1 + x| = 1 + |x|$ donne alors $a = \sqrt{a^2 + b^2}$ d'où $b = 0$ et $a \geq 0$.

Par suite $x \in \mathbb{R}_+$ et on conclut.

Exercice 43 : [énoncé]

On a

$$|z| + |z'| = \frac{1}{2} |(z - z') + (z + z')| + \frac{1}{2} |(z' - z) + (z' + z)| \leq |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.

Il y a égalité si, et seulement si, $z - z' = 0$ (i.e. $z = z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}_+$ ce qui se résume à $z' = -z$.

Exercice 44 : [énoncé]

Si $a = 0$, l'inégalité est vraie avec égalité si, et seulement si, $b = 0$.

Si $a \neq 0$, l'inégalité revient à

$$1 + |u| \leq |1 + u| + |1 - u|$$

avec $u = b/a$. En écrivant $u = x + iy$,

$$\begin{aligned} (1 + |u|)^2 &= 1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 \\ &\leq 2 + 2(x^2 + y^2) \\ &= |1 + u|^2 + |1 - u|^2 \\ &\leq (|1 + u| + |1 - u|)^2 \end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $x^2 + y^2 = 1$ et $|1 - u^2| = 0$ soit $u = \pm 1$ ce qui revient à $a = \pm b$.

Exercice 45 : [énoncé]

Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z \neq 1/\bar{a}$.

Si tel est le cas

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1 \iff |z - a|^2 \leq |1 - \bar{a}z|^2$$

Sachant $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{x}y) + |y|^2$, on obtient

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1 \iff (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1) \geq 0$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 46 : [énoncé]

a) En développant

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.

b) On a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leq 4$$

donc parmi les quantités $|z_1 + z_2|$ et $|z_1 - z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 47 : [énoncé]

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si $z \in \mathbb{R}_-$ alors $f(z) = 0$.

Sinon, on peut écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi; \pi[$ et alors

$$f(z) = r \frac{1 + e^{i\theta}}{2} = r \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$$

Puisque $\cos(\theta/2) \geq 0$

$$|f(z)| = r \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} Z > 0\}$$

Inversement, soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} Z > 0$.

On peut écrire $Z = Re^{i\alpha}$ avec $R > 0$ et $\alpha \in]-\pi/2; \pi/2[$. Pour

$$z = \frac{R}{\cos \alpha} e^{2i\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = \operatorname{Re}^{i\alpha} = Z$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 48 : [énoncé]

$$|z + 1|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1 \text{ et } (|z| + 1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1 \text{ donc} \\ |z + 1| = |z| + 1 \iff \operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 49 : [énoncé]

Puisque le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp(i(n-1)\pi) = (-1)^{n-1}$$

Exercice 50 : [énoncé]

Notons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$$

Alors

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = 2 \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) = 4 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - e^{i\pi/n}} \right) = 2 \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2 \cot \frac{\pi}{2n}$$

Exercice 51 : [énoncé]

Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \omega_k = e^{2ik\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}$$

a) Si n ne divise pas p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^n \omega^{kp} = \omega^p \frac{1 - \omega^{np}}{1 - \omega^p} = 0$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^n \omega^{kp} = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

b) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{1}{1 - \omega_k} = -e^{-ik\pi/n} \frac{1}{2i \sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{2} \cot \frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n} = \sum_{\ell=n-k}^{n-1} \cot \left(\pi - \frac{\ell\pi}{n} \right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot \left(\frac{\ell\pi}{n} \right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot \frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots$$

Exercice 52 : [énoncé]

On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^n k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k - n\omega^n = -n$$

donc

$$S = \frac{n}{\omega-1}$$

Exercice 53 : [énoncé]

a)

$$j(j+1) = j^2 + j = -1$$

b)

$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1$$

c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}$$

Exercice 54 : [énoncé]

Notons $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ les racines n ème de l'unité.

Si z est solution alors nécessairement $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$

Si $k = 0$ alors ce la donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.

Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n}}{2i \sin \frac{k\pi}{n}} = -i \cot \frac{k\pi}{n}$$

Inversement, en remontant le calcul : ok

Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{ -i \cot \frac{k\pi}{n} \mid k \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$$

Puisque la fonction cot est injective sur $]0; \pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 55 : [énoncé]

On a

$$z^n + 1 = 0 \iff z^n = e^{i\pi}$$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$ est solution particulière de l'équation et donc

$$\mathcal{S} = \{z_0 \omega_k \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \left\{ e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

Exercice 56 : [énoncé]

$z = i$ n'est pas solution.

Pour $z \neq i$,

$$\begin{aligned} (z+i)^n &= (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{z+i}{z-i} = \omega_k \end{aligned}$$

en notant $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

Pour $k = 0$, $\omega_k = 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ n'a pas de solution.

Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\omega_k \neq 1$ et l'équation $\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$ a pour solution

$$z_k = i \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ avec

$$z_k = i \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n} e^{i \frac{k\pi}{n}}}{2 i \sin \frac{k\pi}{n} e^{i \frac{k\pi}{n}}} = \cot \frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R}$$

deux à deux distincts car $\cot$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \pi[$ où évoluent les $\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Exercice 57 : [énoncé]

On a

$$1 + A + B = 0, AB = 2 \text{ et } \operatorname{Im}(A) > 0$$

donc

$$A = \bar{B} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 58 : [énoncé]

a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a

$$z^n - 1 = (z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k)$$

Or on a aussi $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.

- b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1} (x - \omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.
- c) Pour $z = 1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,

$$1 - \omega^k = -e^{i \frac{k\pi}{n}} 2 i \sin \frac{k\pi}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{i \frac{k\pi}{n}} = e^{i \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k} = i^{n-1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$$

puis la relation proposée.

Exercice 59 : [énoncé]

Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$

Sachant $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation

$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$

et donc

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Or $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$ donc

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

puis

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geq 0$.

Exercice 60 : [énoncé]

$x = 1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$ ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$.

Lorsque $a = -1$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lorsque $a = 3$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+i3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+i3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 61 : [énoncé]

a) $\mathcal{S} = \{1, -1 + 2i\}$,

b) $\mathcal{S} = \{-1 + i, -3 + 2i, 1 - i, 3 - 2i\}$.

Exercice 62 : [\[énoncé\]](#)

- a) $\pm(3 - 2i)$
 b) $a = -2i, b = -1 + 3i$ et $c = 2 + i$
 c) $|c - b| = |c - a| = \sqrt{13}$ et $|b - a| = \sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 63 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$4\sqrt{2}(1 + i) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

donc $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ est solution particulière de l'équation.

L'équation $z^3 = z_0^3$ équivaut alors à l'équation $(z/z_0)^3 = 1$ dont l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \{z_0, z_0j, z_0j^2\}$$

Exercice 64 : [\[énoncé\]](#)

Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation

$$z^2 - (1 + i)z + (2 - i) = 0$$

On obtient l'ensemble solution

$$\mathcal{S} = \{(1 + 2i, -i), (-i, 1 + 2i)\}$$

Exercice 65 : [\[énoncé\]](#)

Posons $\rho = |Z|$ et $\theta = \arg Z \quad [2\pi]$.

$$\begin{aligned} e^z = Z &\iff e^{\operatorname{Re} z} e^{i\operatorname{Im} z} = |Z| e^{i\theta} \\ &\iff e^{\operatorname{Re} z} = |Z| \text{ et } e^{i\operatorname{Im} z} = e^{i\theta} \\ &\iff z = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 66 : [\[énoncé\]](#)

Posons $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$. On a

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}$$

Pour n assez grand, on a $1 + x/n > 0$ et donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n e^{in\theta_n} \text{ avec } r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan \frac{y/n}{1 + x/n}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \times \left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \rightarrow \exp(x)$$

et

$$n\theta_n \sim n \times \frac{y}{n} \rightarrow y$$

donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow \exp(x) e^{iy} = \exp(z)$$

Exercice 67 : [\[énoncé\]](#)

$$z = e^{i\theta} + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}.$$

Si $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ alors $|z| = 2 \cos \frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} \quad [2\pi]$, si $\cos \frac{\theta}{2} = 0$ alors $|z| = 0$.

et si $\cos \frac{\theta}{2} < 0$ alors $|z| = -2 \cos \frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\theta}{2} + \pi \quad [2\pi]$.

$z' = e^{i\theta} - 1 = 2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$ et la suite est similaire.

Exercice 68 : [\[énoncé\]](#)

En factorisant $e^{i\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{i \sin \theta/2}{\cos \theta/2} = i \tan \frac{\theta}{2}$$

Exercice 69 : [\[énoncé\]](#)

On peut factoriser

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} (e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}) = 2 \cos \frac{\theta - \theta'}{2} e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos \frac{\theta - \theta'}{2}$.

Exercice 70 : [\[énoncé\]](#)

Puisque $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$, en multipliant par e^{-ix} , on obtient

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$$

avec $\alpha = y - x$ et $\beta = z - x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = -1 \\ \sin \alpha + \sin \beta = 0 \end{cases}$$

L'équation $\sin \alpha + \sin \beta = 0$ donne

$$\alpha = -\beta \pmod{2\pi} \text{ ou } \alpha = \pi + \beta \pmod{2\pi}$$

Si $\alpha = \pi + \beta \pmod{2\pi}$ alors la relation $\cos \alpha + \cos \beta = -1$ donne $0 = -1$.

Il reste $\alpha = -\beta \pmod{2\pi}$ et alors $2 \cos \alpha = -1$ donne $\alpha = \pm 2\pi/3 \pmod{2\pi}$.

Par suite $e^{i\alpha} = j$ ou j^2 .

On obtient alors aisément $1 + e^{2i\alpha} + e^{2i\beta} = 0$ puis $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.