

Probabilités sur un univers fini

Evènements et langage ensembliste

Exercice 1 [04003] [Correction]

Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisable. Exprimer les évènements suivants :

- Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.
- Un seul des trois évènements A, B ou C est réalisé.
- Au moins deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.
- Pas plus de deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.

Exercice 2 [04004] [Correction]

Soient A, B, C trois évènements.

- Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$.
- À quelle condition sur A et C les deux évènements précédents sont-ils égaux ?

Construction d'une probabilité

Exercice 3 [03821] [Correction]

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'évènement $\{k\}$ soit proportionnelle à k .

Exercice 4 [03822] [Correction]

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'évènement $\{1, 2, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 .

Exercice 5 [03823] [Correction]

À quelle(s) condition(s) sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ vérifiant

$$P(\{a, b\}) = x \text{ et } P(\{b, c\}) = y?$$

Exercice 6 [03824] [Correction]

Soient A, B deux parties d'un ensemble Ω fini vérifiant

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap \bar{B} \neq \emptyset, \bar{A} \cap B \neq \emptyset \text{ et } \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$$

À quelle condition sur $(a, b, c, d) \in]0; 1[^4$ existe-t-il une probabilité P sur Ω vérifiant

$$P(A | B) = a, P(A | \bar{B}) = b, P(B | A) = c \text{ et } P(B | \bar{A}) = d?$$

Exercice 7 [03829] [Correction]

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.

Montrer

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$$

Exercice 8 [04050] [Correction]

Soit P une probabilité sur un ensemble Ω et A, B deux événements de Ω . On veut établir

$$|P(A)P(B) - P(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}$$

À cet effet, on introduit

$$x = P(A \cap B), y = P(A \cap \bar{B}), z = P(\bar{A} \cap B) \text{ et } t = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

- Que vaut $x + y + z + t$?
- Vérifier

$$P(A)P(B) - P(A \cap B) = yz - xt$$

- Conclure

Probabilité par dénombrement

Exercice 9 [03957] [Correction]

On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leq n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.

Les répartitions possibles sont équiprobables.

- Déterminer la probabilité de l'évènement :

A: « chaque urne contient au plus une boule »

b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

B : « il existe une urne contenant au moins deux boules »

Exercice 10 [03958] [Correction]

- a) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
- b) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

Exercice 11 [04116] [Correction]

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On opère à des tirages successifs avec remise.

- a) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n -ième tirage ?
- b) Quelle est la probabilité que la k -ième boule blanche tirée apparaisse lors du n -ième tirage ?

Exercice 12 [04120] [Correction]

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

- a) Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
- b) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
- c) Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

Probabilités conditionnelles

Exercice 13 [03361] [Correction]

Soient A et B deux évènements avec $P(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \text{ et } P(A \cap B \mid A)$$

Exercice 14 [03826] [Correction]

On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 15 [03828] [Correction]

On se donne $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne de numéro k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

- a) Quelle est la probabilité que la $(n + 1)$ -ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
- b) Que devient cette probabilité lorsque $N \rightarrow +\infty$?

Exercice 16 [03831] [Correction]

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < P(B) < 1$. Établir

$$P(A) = P(A \mid B) P(B) + P(A \mid \bar{B}) P(\bar{B})$$

Exercice 17 [03841] [Correction]

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

- a) Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
- b) Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 18 [03954] [Correction]

Une famille possède deux enfants.

- a) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
- b) Quelle est cette probabilité sachant que l'aîné est un garçon ?
- c) On sait que l'un des deux enfants est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre le soit aussi ?
- d) On sait que l'un des deux enfants est un garçon et est né un 29 février, quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Exercice 19 [03955] [\[Correction\]](#)

Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux cartes sont servies à un joueur de Poker.

- Quelle est la probabilité que celle-ci comporte exactement une paire d'As ?
- Même question sachant que le jeu distribué comporte au moins un As ?

Exercice 20 [04012] [\[Correction\]](#)

Soient A, B, C trois évènements avec $P(B \cap C) > 0$. Vérifier

$$P(A \mid B \cap C) P(B \mid C) = P(A \cap B \mid C)$$

Formule des probabilités totales

Exercice 21 [03842] [\[Correction\]](#)

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.

On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 22 [02417] [\[Correction\]](#)

Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On tire de celle-ci une boule, on note sa couleur et on la remet accompagnée de d boules de la même couleur. On répète l'expérience à l'envi.

Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n -ième tirage.

Exercice 23 [03827] [\[Correction\]](#)

Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».

Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 .

On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Evènements indépendants

Exercice 24 [03948] [\[Correction\]](#)

On lance à dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des

évènements

$A = \text{« on obtient le tirage 2, 4 ou 6 »}$ et $B = \text{« on obtient le tirage 3 ou 6 »}$

Exercice 25 [03951] [\[Correction\]](#)

Soient A et B deux évènements indépendants. Les évènements A et $\bar{B}$ sont-ils aussi indépendants ?

Exercice 26 [03953] [\[Correction\]](#)

Montrer qu'un évènement A est indépendant de tout autre évènement si, et seulement si, $P(A) = 0$ ou 1 .

Exercice 27 [03830] [\[Correction\]](#)

Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé.

On suppose $A \cap B = \emptyset$. À quelle condition les évènements A et B sont-ils alors indépendants ?

Exercice 28 [03949] [\[Correction\]](#)

Soient A, B, C trois évènements tels que A et B d'une part, A et C d'autre part, soient indépendants. Les évènements A et $B \cup C$ sont-ils indépendants ? Même question avec A et $B \cap C$.

Exercice 29 [03950] [\[Correction\]](#)

Soient A, B, C trois évènements tels que A et $B \cup C$ d'une part, A et $B \cap C$ d'autre part, soient indépendants. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 30 [03952] [\[Correction\]](#)

Soient A, B, C trois évènements.

On suppose A indépendant de $B \cap C$, B indépendant de $A \cap C$ et C indépendant de $A \cap B$.

On suppose en outre A indépendant de $B \cup C$ et $P(A), P(B), P(C) > 0$.

Établir que les évènements A, B, C sont mutuellement indépendants.

Exercice 31 [03819] [\[Correction\]](#)

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Pour un entier p divisant n , on introduit l'événement

$$A_p = \{1 \leq k \leq n \mid p \text{ divise } k\}$$

- Calculer $P(A_p)$
- Soient p et q deux diviseurs de n . On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants. Plus généralement montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont indépendants.
- On note

$$B = \{1 \leq k \leq n \mid k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$$

Montrer

$$P(B) = \prod_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice 32 [04033] [\[Correction\]](#)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)$$

Formule de Bayes**Exercice 33** [03820] [\[Correction\]](#)

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ? Qu'en conclure ?

Exercice 34 [03962] [\[Correction\]](#)

Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un « six » une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé la pochette et on le lance.

- On obtient un « six ». Quelle est la probabilité que le dé tiré soit équilibré ?
- Au contraire, on a obtenu un « cinq ». Même question.

Exercice 35 [04119] [\[Correction\]](#)

Dans une entreprise 1 % des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95 % des articles défectueux mais aussi de refuser 2 % des articles acceptables.

- Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
- Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé](#)

- a) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.
- b) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.
- c) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.
- d) $\overline{A \cap B \cap C}$.

Exercice 2 : [énoncé](#)

- a) En développant

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C)$$

- b) $A \cap C = A$ i.e. $A \subset C$ est une condition évidemment suffisante. Elle est aussi nécessaire car si

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

alors

$$A \subset A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C \subset C$$

Exercice 3 : [énoncé](#)

Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^n P(\{k\}) = P(\Omega) = 1$$

donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$$

Exercice 4 : [énoncé](#)

Si P est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(\{1, 2, \dots, k\}) = \alpha k^2$$

En particulier, $P(\Omega) = 1$ donne $\alpha = 1/n^2$.

Aussi,

$$P(\{k\}) = P(\{1, \dots, k\}) - P(\{1, \dots, k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant

$$P(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$$

car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.

On vérifie aussi par additivité

$$P(\{1, 2, \dots, k\}) = \sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$$

et la probabilité déterminée est bien solution.

Exercice 5 : [énoncé](#)

Une probabilité solution P sera entièrement déterminée par les valeurs de $p = P(\{a\})$, $q = P(\{b\})$ et $r = P(\{c\})$ sous les conditions

$$p, q, r \geq 0 \text{ et } p + q + r = 1$$

Nous aurons $P(\{a, b\}) = x$ et $P(\{b, c\}) = y$ si

$$p + q = x \text{ et } q + r = y$$

Le système

$$\begin{cases} p + q = x \\ q + r = y \\ p + q + r = 1 \end{cases}$$

a pour solution

$$p = 1 - y, q = x + y - 1 \text{ et } r = 1 - x$$

Cette solution vérifie $p, q, r \geq 0$ si, et seulement si,

$$x \leq 1, y \leq 1 \text{ et } x + y \geq 1$$

ce qui fournit les conditions nécessaires et suffisantes que doivent respecter x et y .

Exercice 6 : [énoncé]

Soit P une probabilité solution. Posons

$$x = P(A \cap B), y = P(A \cap \bar{B}), z = P(\bar{A} \cap B) \text{ et } t = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

On a $x, y, z, t \geq 0$ et par additivité

$$x + y + z + t = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Inversement, si x, y, z, t sont quatre réels positifs de somme égale à 1, on peut déterminer une probabilité P sur Ω vérifiant les conditions ci-dessus : il suffit d'introduire un élément de chacun des ensembles disjoints $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, de poser la probabilité de l'événement élémentaire associé égale à x, y, z et t respectivement, puis les probabilités des autres événements élémentaires égaux à 0.

Le problème revient alors à déterminer sous quelle condition, il existe $x, y, z, t \geq 0$ de somme égale à 1 tels que

$$P(A | B) = a, P(A | \bar{B}) = b, P(B | A) = c \text{ et } P(B | \bar{A}) = d$$

Par additivité

$$P(A) = x + y \text{ et } P(B) = x + z$$

On a alors $P(A | B) = a$ si, et seulement si, $x = a(x + z)$.

De même, les autres conditions fournissent les équations

$$y = b(1 - (x + z)), x = c(x + y) \text{ et } z = d(1 - (x + y))$$

ce qui nous conduit à un système linéaire de quatre équations et trois inconnues

$$\begin{cases} (1-a)x - az = 0 \\ bx + y + bz = b \\ (1-c)x - cy = 0 \\ dx + dy + z = d \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à la solution

$$x = \frac{abc}{a(1-c) + bc}, y = \frac{ab(1-c)}{a(1-c) + bc} \text{ et } z = \frac{(1-a)bc}{a(1-c) + bc}$$

avec le dénominateur commun non nul car somme de quantités strictement positives.

La quatrième équation du système est alors vérifiée si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

La solution (x, y, z) alors obtenue vérifie $x, y, z \geq 0$ et $x + y + z \leq 1$ de sorte qu'on peut encore déterminer $t \geq 0$ tel que $x + y + z + t = 1$.

Finalement, il existe une probabilité telle que voulue si, et seulement si,

$$ad(1-b)(1-c) = bc(1-a)(1-d)$$

ce qui, en divisant par $abcd$, peut encore s'énoncer

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

Exercice 7 : [énoncé]

On a $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leq P(A)$ et de même $P(A \cap B) \leq P(B)$ donc

$$P(A \cap B) \leq \min \{P(A), P(B)\}$$

Bien évidemment $P(A \cap B) \geq 0$. De plus $P(A \cup B) \leq 1$ or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

donc

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

puis

$$\max \{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B)$$

Exercice 8 : [énoncé]

- a) Ω est la réunion disjointes des événements dont les probabilités définissent x, y, z, t . On en déduit

$$x + y + z + t = 1$$

- b)

$$P(A)P(B) = (x + y)(x + z) - x = x(x + y + z) + yz - x$$

Or

$$x(x + y + z) + xt = x$$

donc

$$P(A)P(B) - P(A \cap B) = yz - xt$$

c) D'une part

$$P(A)P(B) - P(A \cap B) \leq yz$$

Or $x + y + z + t = 1$ donc $z \leq 1 - y$ puis

$$P(A)P(B) - P(A \cap B) \leq y(1 - y) \leq \frac{1}{4}$$

D'autre part

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq xt \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$$

On peut alors conclure.

Exercice 9 : [énoncé]

En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application φ de $\{1, \dots, r\}$ vers $\{1, \dots, n\}$ associant à la boule d'indice i l'urne de numéro $\varphi(i)$ qui la contient.

Il y a n^r répartitions possible.

a) La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction φ injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{n^r}$$

b) La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A)$$

Exercice 10 : [énoncé]

a) La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.

b) On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

Exercice 11 : [énoncé]

Notons A_i l'événement « une boule blanche est obtenue lors du i -ème tirage ». Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $P(A_i) = p$ pour tout i .

a) Notons B_n l'événement « la première boule blanche apparaît lors du n -ième tirage ».

On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$$

Par indépendance, on obtient

$$P(B_n) = (1-p)^{n-1}p$$

b) Notons C_n l'événement « k boules sont apparues lors des n premier tirages » et D_n l'événement « la k -ième boule blanche tirée apparaît lors du n -ième tirage ».

L'événement C_n est la réunion disjointe des événements $C_{n-1} \cap \overline{A_n}$ et D_n .

On a

$$P(C_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir k succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Aussi, par indépendance

$$P(C_{n-1} \cap \overline{A_n}) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \times (1-p)$$

On en tire

$$P(D_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice 12 : [énoncé]

a) Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.

b) Un tirage s'apparente à une fonction de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}$$

- c) Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. À une telle fonction f , on peut associer la fonction $g: \llbracket 1; 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; 12 \rrbracket$ déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ correspond une unique fonction f croissante de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Il y a donc autant de fonctions croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ que de fonctions strictement croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}$$

Exercice 13 : [énoncé]

Puisque $A \subset A \cup B$, on a $P(A \cup B) \geq P(A)$ puis

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

i.e.

$$P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$$

Exercice 14 : [énoncé]

Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$P(A) = p$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i . Par hypothèse $P(A_i) = P(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$P(A_i) = p/N$$

La question posée consiste à déterminer

$$P(A_N | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1})$$

On a

$$P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

et

$$P(A_N \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = P(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$P(A_N | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}$$

Exercice 15 : [énoncé]

- a) Dans l'urne d'indice k , la probabilité de tirer une boule blanche vaut k/N . Dans cette même urne, la probabilité de tirer une succession de n boules blanches vaut $(k/N)^n$.

Par la formule des probabilités totales, la probabilité qu'après choix d'une urne, nous tirions une succession de n boules blanches vaut

$$\pi_n = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

Notons A_k l'événement, la boule tirée lors du k -ième tirage est une boule blanche

La probabilité conditionnée cherchée vaut

$$P(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1})}{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}$$

avec

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \pi_n$$

donc

$$P(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{N} \frac{\sum_{k=0}^N k^{n+1}}{\sum_{k=0}^N k^n}$$

- b) Par somme de Riemann, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

En adaptant quelque peu l'expression, on obtient

$$\pi_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1}$$

donc

$$P(A_{n+1} | A_1 \cap \dots \cap A_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2}$$

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$P(A) = P(A \cap (B \cup \bar{B})) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$$

Les événements $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ étant disjoints

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

Or $P(A \cap B) = P(A | B) P(B)$ et $P(A \cap \bar{B}) = P(A | \bar{B}) P(\bar{B})$.**Exercice 17 :** [\[énoncé\]](#)

- a) L'évènement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches.
Par dénombrement, sa probabilité est

$$\binom{8}{3} / \binom{10}{3} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

- b) Notons A l'évènement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$P(A) = \frac{9 \times 8 + 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}$$

L'évènement B , au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{3}{8}$$

Exercice 18 : [\[énoncé\]](#)Pour $i = 1, 2$, notons G_i l'évènement« le i - ème enfant de la famille est un garçon »On considère les événements G_1 et G_2 indépendants et

$$P(G_1) = P(G_2) = 1/2$$

On étudie l'évènement $A = G_1 \cap G_2$.

$$a) P(A) = P(G_1) \times P(G_2) = 1/4.$$

$$b) P(A | G_1) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1)} = P(G_2) = \frac{1}{2}.$$

$$c) P(A | G_1 \cup G_2) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1) + P(G_2) - P(G_1 \cap G_2)} = \frac{1}{3}.$$

d) Notons D_i l'évènement« le i - ème enfant de la famille est né le 29 février »Les événements G_1, G_2, D_1 et D_2 sont considérés mutuellement indépendants avec

$$P(D_1) = P(D_2) = \frac{1}{366 + 3 \times 365} = p$$

(en première approximation, une année bissextile a lieu tous les quatre ans)

On veut calculer

$$P(A | (G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2))$$

On a

$$P((G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)) = P(G_1 \cap D_1) + P(G_2 \cap D_2) - P(G_1 \cap D_1 \cap G_2 \cap D_2)$$

et donc

$$P((G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)) = p - \frac{1}{4}p^2$$

Aussi

$$P(A \cap [(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)]) = P([A \cap D_1] \cup [A \cap D_2])$$

et donc

$$P(A \cap [(G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)]) = \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2$$

Finalement

$$P(A | (G_1 \cap D_1) \cup (G_2 \cap D_2)) = \frac{2-p}{4-p} \simeq 0,5$$

Exercice 19 : [\[énoncé\]](#)

- a) Il y a $\binom{52}{5}$ distributions possibles équiprobables.

Il y a exactement $\binom{4}{2}$ paires d'As, $\binom{48}{3}$ façons de compléter ce jeu avec d'autres cartes que des As.

Au final, ce la donne la probabilité

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{2162}{54145} \simeq 0,04$$

b) La probabilité que le jeu distribué ne comporte pas d'As est

$$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

et par complément, celle que le jeu distribué comporte au moins un As est

$$1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$$

La probabilité conditionnelle cherchée est donc

$$\frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}} = \frac{1081}{9236} \simeq 0,12$$

Exercice 20 : [énoncé]

On a

$$P(A | B \cap C) P(B | C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A \cap B | C)$$

Exercice 21 : [énoncé]

Notons A_i l'événement la boule obtenue lors du i -ème tirage est noire.

On introduit un système complet d'événements en considérant $B_1, \dots, B_4$ égaux à

$$A_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(A_3) = \sum_{k=1}^4 P(A_3 | B_k) P(B_k)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$P(A_3 | B_1) = 0$$

$$P(A_3 | B_2) = P(A_3 | B_3) = 1/8 \text{ avec } P(B_2) = P(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$P(A_3 | B_4) = 2/8 \text{ avec } P(B_4) = 8/10 \times 7/9$$

Au final

$$P(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

Exercice 22 : [énoncé]

Au premier tirage, la probabilité que la boule tirée soit blanche est

$$\frac{b}{b+r}$$

Au deuxième tirage, il faut tenir compte du résultat du précédent tirage. La probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche sachant que la première l'était est $(b+d)/(b+r+d)$. Si la première était rouge, on obtient $b/(b+r+d)$. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage est

$$\frac{b+d}{b+r+d} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+d} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que la probabilité que la boule soit blanche lors du n -ième tirage vaut toujours $b/(b+r)$.

Supposons cette propriété acquise jusqu'au rang n et étudions le résultat du $n+1$ -ième tirage en fonction du résultat du premier tirage. Si, une boule blanche est tirée au départ, le $n+1$ -ième tirage peut se comprendre comme le n -ième tirage à partir d'une urne composée de $b+d$ boules blanches et r boules rouges. On raisonne de même si une boule rouge est initialement tirée. Par la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n+1$ -ième tirage est

$$\frac{b}{b+r} \times \frac{b+d}{b+r+d} + \frac{r}{b+r} \frac{b}{b+r+d} = \frac{b}{b+r}$$

Récurrence établie.

Exercice 23 : [énoncé]

On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$.

Supposons connu p_n . Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1-p$$

Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique a pour terme général

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}$$

Si $p \in]0; 1[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \rightarrow 1/2$.

Exercice 24 : [\[énoncé\]](#)

$P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$ donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Les évènements A et B sont bien indépendants.

Exercice 25 : [\[énoncé\]](#)

Puisque A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$, on a

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

et donc

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})$$

puis

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$$

Les évènements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exercice 26 : [\[énoncé\]](#)

Si A est indépendant de tout évènement alors A est indépendant de lui-même et donc

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$$

On en déduit $P(A) = 0$ ou 1 .

Inversement, supposons $P(A) = 0$. Pour tout évènement B , on a $A \cap B \subset A$ et donc $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. Ainsi

$$P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$$

Supposons maintenant $P(A) = 1$. On a $P(\bar{A}) = 0$ et donc $\bar{A}$ est indépendant de tout évènement B . Par suite, A est aussi indépendant de tout évènement B .

Exercice 27 : [\[énoncé\]](#)

Si A et B sont indépendants alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

donc $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

La réciproque est immédiate.

Exercice 28 : [\[énoncé\]](#)

Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2\} \text{ et } C = \{2, 3\}$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ et } P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

Cependant

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cup C) = 1/4$$

et

$$P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 \neq P(A)P(B \cap C) = 1/12$$

Ainsi, A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants. Non plus, A et $B \cap C$.

Exercice 29 : [\[énoncé\]](#)

Considérons le tirage équilibré d'un dé à six faces et considérons

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\} \text{ et } C = \{1, 2, 4\}$$

On vérifie aisément

$$P(A \cap (B \cup C)) = 1/3 = P(A)P(B \cup C) \text{ et } P(A \cap (B \cap C)) = 1/6 = P(A)P(B \cap C)$$

Cependant

$$P(A \cap B) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4$$

Exercice 30 : [\[énoncé\]](#)

On a

$$P(A)P(B \cup C) = P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$

et donc

$$P(A)P(B \cup C) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Or

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$$

et

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

donc

$$P(A)P(B) + P(A)P(C) = P(A \cap B) + P(A \cap C)$$

Si $P(A)P(B) > P(A \cap B)$ alors $P(A)P(C) < P(A \cap C)$. Or B étant indépendant de $A \cap C$ et C de $A \cap B$, on obtient

$$P(B)P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(C)P(A \cap B)$$

ce qui fournit

$$P(A)P(B)P(C) < P(A \cap B \cap C) < P(A)P(B)P(C)$$

C'est absurde. De même $P(A)P(B) < P(A \cap B)$ est absurde et donc

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

puis

$$P(A)P(C) = P(A \cap C)$$

Aussi

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

et enfin, puisque A et $B \cap C$ sont indépendants

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C)$$

ce qui donne

$$P(B)P(C) = P(B \cap C)$$

Exercice 31 : [énoncé]

a) Les multiples de p dans $\{1, \dots, n\}$ sont $p, 2p, \dots, n$. Il y en a n/p et donc

$$P(A_p) = \frac{1}{p}$$

b) Puisque p et q sont premiers entre eux, on a

$$pq \mid k \iff p \mid k \text{ et } q \mid k$$

On en déduit $A_p \cap A_q = A_{pq}$ et puisque

$$P(A_{pq}) = \frac{1}{pq} = P(A_p)P(A_q)$$

on peut qualifier les événements A_p et A_q d'indépendants.

On généralise par un calcul analogue à l'indépendance de $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ car

$$A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_k}}$$

pour toute suite finie $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$.

c) Notons $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n . Les entiers k et n sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas de diviseurs premiers en communs. Ainsi

$$B = \bar{A}_{p_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{p_r}$$

Les événements $\bar{A}_{p_1}, \dots, \bar{A}_{p_r}$ étant indépendants (car leurs contraires le sont)

$$P(B) = \prod_{k=1}^r P(\bar{A}_{p_k}) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Ce résultat est une façon « originale » d'obtenir la valeur de la fonction indicatrice d'Euler.

Exercice 32 : [énoncé]

On étudie

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right)$$

Par indépendances des $\bar{A}_i$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)]$$

Or $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \leq \prod_{i=1}^n e^{-P(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)$$

Exercice 33 : [énoncé]

Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$P(M) = 10^{-4}, P(T \mid M) = 0,99 \text{ et } P(T \mid \bar{M}) = 10^{-3}$$

Par la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(T \mid M)P(M) + P(T \mid \bar{M})P(\bar{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$P(M \mid T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)}$$

ce qui numériquement donne 9 %.

La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif! Cela s'explique aisément car la population de malade est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

Exercice 34 : [énoncé]

- a) Notons D l'évènement le dé tiré est équilibré et A l'évènement : on a obtenu un « six »

$$P(D) = P(\bar{D}) = 1/2, P(A | D) = 1/6 \text{ et } P(A | \bar{D}) = 1/2$$

Par la formule de Bayes

$$P(D | A) = \frac{P(A | D) P(D)}{P(A)}$$

avec par la formule des probabilités totales

$$P(A) = P(A | D) P(D) + P(A | \bar{D}) P(\bar{D})$$

On obtient

$$P(D | A) = \frac{1}{4}$$

- b) Notons B l'évènement : on a obtenu un « cinq » Par des calculs analogues aux précédents

$$P(D | B) = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10}} = \frac{5}{8}$$

Exercice 35 : [énoncé]

Introduisons les événements

A = « L'article contrôlé est défectueux »

B = « Le contrôle qualité refuse l'article »

Le cadre hypothétique donne

$$P(A) = 0,01, P(B | A) = 0,95 \text{ et } P(B | \bar{A}) = 0,02$$

- a) Il y a erreur de contrôle lorsqu'il y a réalisation de l'évènement $C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. Par additivité

$$P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

Par probabilités composées

$$P(C) = P(A) P(\bar{B} | A) + P(\bar{A}) P(B | \bar{A})$$

avec $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A)$. Numériquement, on obtient

$$P(C) = 0,01 \times 0,05 + 0,99 \times 0,02 = 0,0203$$

La majorité des erreurs de contrôle provient des articles fonctionnels refusés.

- b) On veut ici calculer $P(A | \bar{B})$. On met en œuvre la formule de Bayes

$$P(A | \bar{B}) = \frac{P(\bar{B} | A) P(A)}{P(\bar{B})}$$

avec, par probabilités totales

$$P(\bar{B}) = P(\bar{B} | A) P(A) + P(\bar{B} | \bar{A}) P(\bar{A})$$

Numériquement

$$P(A | \bar{B}) = \frac{0,05 \times 0,01}{0,05 \times 0,01 + 0,98 \times 0,99} \simeq 5.10^{-4}$$