

Résumé de Math Sup : Matrices

I - Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Une matrice à n lignes et p colonnes (n et p entiers naturels non nuls) est une application de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\mathbb{K}$ qui à un couple d'indices (i, j) associe un élément de $\mathbb{K}$ noté $a_{i,j}$. Une matrice se note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

1) Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Addition de deux matrices. $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} + (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Multiplication par un scalaire. $\lambda(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = (\lambda a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Muni de ces deux lois, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension np et en particulier $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n^2 .

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont le coefficient ligne k , colonne l vaut 1 si $(k, l) = (i, j)$ et 0 sinon. Une écriture abrégée de son terme général est $\delta_{k,i} \delta_{l,j}$.

2) Produit de deux matrices.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit AB est la matrice de format (n, q) dont le terme général ligne i , colonne j , $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Dans le cas des matrices non carrées, ce produit n'est pas une loi interne. Il est « associatif », non « commutatif » en général et « distributif sur l'addition ».

Théorème. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, non commutatif pour $n \geq 2$.

L'ensemble des matrices inversibles pour $\times$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$. $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, non commutatif pour $n \geq 2$.

Dangers principaux :

- On peut avoir $AB = 0$ sans que ni A , ni B ne soient nuls : $AB \neq A = 0$ ou $B = 0$.
- Plus généralement, l'égalité $AB = AC$ n'entraîne pas en général $B = C$ mais si A est carrée et inversible, A est simplifiable.
- $AB = 0 \nRightarrow BA = 0$.
- Les identités $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ et plus généralement le binôme de NEWTON, et aussi $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ ne sont vraies que si A et B commutent.
- La somme de 2 matrices inversibles n'est en général pas inversible.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) A est inversible
- 2) $\det A \neq 0$
- 3) A est inversible à gauche
- 4) A est inversible à droite
- 5) A est simplifiable à gauche
- 6) A est simplifiable à droite
- 7) $\text{rg} A = n$
- 8) $\text{Ker} A = \{0\}$
- 9) $\text{Im} A = M_{n,1}(\mathbb{K})$
- 10) Pour tout vecteur colonne B , le système $AX = B$ admet une unique solution où X est un vecteur colonne inconnu.

($\text{Ker} A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes X tels que $AX = 0$ et $\text{Im} A$ est l'ensemble des vecteurs colonnes de la forme AX où X est un vecteur colonne quelconque.)

Remarque. $AB = 0 \nRightarrow BA = 0$ mais $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$.

Produit de deux matrices élémentaires.

Soient $E_{i,j}$ une matrice élémentaire de format (n, p) et $E_{k,l}$ de format (p, q) alors

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}.$$

Démonstration. Le coefficient ligne u , colonne v de ce produit vaut

$$\sum_{w=1}^p \delta_{u,i} \delta_{w,j} \delta_{w,k} \delta_{v,l} = \delta_{u,i} \delta_{v,l} \sum_{w=1}^p \delta_{w,j} \delta_{w,k} = \delta_{j,k} \delta_{u,i} \delta_{v,l}$$

qui est le coefficient ligne u , colonne v de la matrice $\delta_{j,k} E_{i,l}$.

3) Transposition. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de format (n, p) . La transposée de A notée ${}^t A$ est la matrice de format (p, n) dont le coefficient ligne i , colonne j , vaut $a_{j,i}$.

Théorème. ${}^t({}^t A) = A$, ${}^t(A+B) = {}^t A + {}^t B$, ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$. La transposition est un isomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ sur l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Théorème. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$. Si de plus A est carrée, A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est et dans ce cas, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Les matrices carrées A telles que ${}^tA = A$ sont les matrices symétriques. Leur ensemble est noté $S_n(\mathbb{K})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les matrices A telles que ${}^tA = -A$ sont les matrices antisymétriques. Leur ensemble est noté $A_n(\mathbb{K})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$. $\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration. L'endomorphisme t de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée est involutif et est donc une symétrie. On sait alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \text{Ker}(t - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(t + \text{Id}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$.

(La décomposition d'une matrice M est alors : $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.)

Une base de $S_n(\mathbb{K})$ est $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ et donc $\dim S_n(\mathbb{K}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

II - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base donnée de E .

Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de p vecteurs de E . La matrice de la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_j)_{1 \leq j \leq p}$, est la matrice de format (n, p) dont le coefficient ligne i , colonne j , vaut la i -ème coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$ (la j -ème colonne est x_j).

III - Matrice d'une application linéaire

1) Définition. Soient E et F des espaces de dimensions respectives n et p et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F .

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f$, est la matrice de la famille $(f(e_j))_{1 \leq j \leq n}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Cette matrice est de format (p, n) .

Le coefficient ligne i , colonne j , de cette matrice est la i -ème coordonnée dans $\mathcal{B}'$ de $f(e_j)$.

Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et F respectivement étant fixées, l'application qui à $f \in \mathcal{L}(E, F)$ associe sa matrice relativement à ces bases est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice car entièrement déterminée par l'image d'une base) et en particulier $\text{Mat}(f+g) = \text{Mat}f + \text{Mat}g$ et $\text{Mat}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}(f)$.

2) Ecriture matricielle d'une application linéaire.

On conserve les notations de 1). Soient x un vecteur de E puis $y = f(x)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du vecteur y dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors

$$Y = AX.$$

Démonstration. $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^p a_{i,j} e'_i \right) = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) e'_i$ et pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ qui est bien le coefficient ligne i de AX .

Une conséquence important est :

Théorème. $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \times \text{Mat}(f)$.

3) Ecriture matricielle d'une application affine.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit f une application affine de E vers F dont la partie linéaire est notée $L(f)$.

Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ (resp. $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$) un repère de E (resp. de F).

Soient M un point de E et $M' = f(M)$.

Soit A la matrice de $L(f)$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Soit B le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de $f(O)$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

Soit X (resp. Y) le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de M (resp. M') dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) alors

$$Y = AX + B.$$

IV - Changement de bases

1) **Matrice de passage.** Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension n .

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou aussi $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ ou $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, est la matrice de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On montre facilement les formules $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ et en particulier $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_n$. Donc toute matrice de passage est inversible et $(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, et réciproquement, toute matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de passage.

2) **Changement de coordonnées.**

a) **Changement de base.**

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soient x un vecteur de E puis X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ (resp. dans $\mathcal{B}'$) alors

$$X = PX'.$$

Démonstration. $x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j \right) e_i$ et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \sum_{j=1}^n p_{i,j} x'_j$ qui est bien

le coefficient ligne i de PX' .

b) **Changement de repère.**

Soient $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$ deux repères d'un espace de dimension finie E .

Soient M un point de E puis X (resp. X') le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ (resp. dans $\mathcal{R}'$) alors

$$X = PX' + Q$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q le vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$.

3) **Changement de bases et applications linéaires.**

a) **Cas général.**

Soient E un espace de dimension n muni de deux bases b et b' et P la matrice de passage de b à b' .

Soient F un espace de dimension p muni de deux bases β et β' et Q la matrice de passage de β à β' .

Soit f une application linéaire de E dans F .

Soit A (resp. B) la matrice de f relativement aux bases b et β (resp. b' et β'). Alors

$$B = Q^{-1}AP.$$

Démonstration.

• **Lemme.** Soient M et N deux matrices de format (n, p) telles que pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a $MX = NX$, alors $M = N$.

En effet, si f et g sont les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrices respectives M et N relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, alors pour tout x de $\mathbb{K}^p$, $f(x) = g(x)$ et donc $f = g$ puis $M = N$.

• $Y = AX$ donc $QY' = APX'$. Donc $BX' = Y' = (Q^{-1}AP)X'$ et ceci pour tout vecteur colonne X' .

b) **Cas particulier d'un endomorphisme.**

Soient E un espace de dimension n muni de deux bases b et b' et P la matrice de passage de b à b' .

Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans b et B dans b' . Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

4) **Matrices équivalentes, matrices semblables.**

Définition. Soient A et B deux matrices rectangulaires (éventuellement carrées) de format (n, p) .

A et B sont équivalentes si et seulement si il existe P matrice carrée inversible de format n et Q matrice carrée inversible de format p telles que $B = QAP$.

Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles sont les matrices d'une même application linéaire relativement à deux couples de bases comme décrit en 3).

Deux matrices équivalentes ont même rang.

Définition. Soient A et B deux matrices carrées de format n . A et B sont semblables si et seulement si il existe P matrice carrée inversible de format n telle que $B = P^{-1}AP$.

Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme relativement à deux bases comme décrit en 3).

Deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fautive en général ne serait-ce que parce que deux matrices équivalentes ne sont pas nécessairement carrées.

Deux matrices semblables ont même rang, même trace, même déterminant, mêmes propriétés de calculs

V - Rang d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (n, p) . Les lignes de A seront notées $L_1, \dots, L_n$ et les colonnes de A seront notées $C_1, \dots, C_p$.

1) Définitions et premières propriétés.

Définition. Le rang de A est la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par la famille des vecteurs colonnes de A .

Exemple. (écriture générale des matrices de rang 1).

Soit A une matrice de format (n, p) et de rang 1. Ses colonnes sont dans la droite engendrée par une certaine colonne non nulle $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$. Plus précisément, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, C_j s'écrit $v_j U$ où les v_j ne sont pas tous nuls.

Si on pose $V = (v_j)_{1 \leq j \leq p}$, alors $A = U^t V = (u_i v_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ où U et V sont non nuls. Réciproquement, une telle matrice est bien de rang 1.

Théorème. $\text{rg} A \leq \min\{n, p\}$.

Théorème. Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un espace E de dimension n telle que A soit la matrice de $\mathcal{F}$ dans une certaine base de E alors $\text{rg} A = \text{rg} \mathcal{F}$.

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F .

Soit f une application linéaire de E vers F de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors $\text{rg} A = \text{rg} f$.

Théorème. Une matrice carrée de format n est inversible si et seulement si son rang est n .

Théorème. $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg} A, \text{rg} B\}$ et $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg} A + \text{rg} B$.

Théorème. Soit A une matrice de format (n, p) . Soit P une matrice carrée inversible de format n et Q une matrice carrée inversible de format p alors $\text{rg}(PA) = \text{rg} A$ et $\text{rg}(AQ) = \text{rg} A$.

Démonstration. $\text{rg}(PA) \leq \text{rg} A$ puis $\text{rg} A = \text{rg}(P^{-1}PA) \leq \text{rg} PA$.

2) Opérations élémentaires.

On utilise les trois opérations élémentaires sur les colonnes ou sur les lignes suivantes :

- 1) Echange de deux colonnes (resp. de deux lignes) . Codage : $C_i \leftrightarrow C_j$ (resp. $L_i \leftrightarrow L_j$) avec $i \neq j$.
- 2) Multiplication d'une colonne (resp. d'une ligne) par λ scalaire non nul. Codage : $C_j \leftarrow \lambda C_j$. (resp. $L_i \leftarrow \lambda L_i$).
- 3) Ajout de la colonne (resp. ligne) j à la colonne (resp. ligne) i avec $i \neq j$. Codage : $C_i \leftarrow C_i + C_j$ (resp. $L_i \leftarrow L_i + L_j$)

On peut ajouter à ces opérations élémentaires deux opérations moins élémentaires obtenues en combinant les transformations précédentes.

- 1) permutation des colonnes (resp. des lignes)
- 2) ajout à une colonne (resp. ligne) d'une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes))

3) Interprétation des opérations élémentaires en terme de calcul matriciel.

a) Produit d'une matrice par une matrice élémentaire.

On considère $A = (a_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p}$ une matrice rectangulaire de format (n, p) .

Calculons le produit de A par une matrice élémentaire $E_{i,j}$ ayant un format adapté.

$$AE_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p} \delta_{l,i} a_{k,l} E_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j}$$

c'est-à-dire :

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{\substack{\text{j-ème colonne} \\ \downarrow}}{a_{1,i}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ (la } i\text{-ème colonne de } A \text{ se retrouve en } j\text{-ème position).}$$

$$\text{De même, } AE_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{k,i} E_{k,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{1,j} & \dots & \dots & a_{p,j} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème ligne (la } j\text{-ème ligne de } A \text{ se retrouve en } i\text{-ème position).}$$

b) Echange de deux colonnes (ou de deux lignes) : $C_i \leftrightarrow C_j$

Soient i et j deux indices distincts puis $P_{i,j}$ la matrice carrée de format p (resp. n) définie par

$$P_{i,j} = I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \text{ (resp. } I_n - \dots)$$

D'après le calcul préliminaire, il est clair que $AP_{i,j}$ se déduit de la matrice A par échange des colonnes i et j et que $P_{i,j}A$ se déduit de A par échange des lignes i et j .

Théorème. $P_{i,j}$ est inversible.

c) Multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire λ non nul : $C_j \leftarrow \lambda C_j$.

Soient $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ puis λ un scalaire non nul.

Soit $\Lambda_j(\lambda)$ la matrice carrée de format p définie par

$$\Lambda_j(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)E_{j,j}.$$

D'après le calcul préliminaire, il est clair que $A\Lambda_j(\lambda)$ se déduit de A par multiplication par λ de la colonne j . Résultat analogue pour les lignes.

Théorème. Si $\lambda \neq 0$, $\Lambda_j(\lambda)$ est inversible.

d) Ajout d'une colonne à une autre colonne (d'une ligne à une autre ligne) : $C_i \leftarrow C_i + C_j$.

Soient i et j deux éléments de $\llbracket 1, p \rrbracket$ (resp. $\llbracket 1, n \rrbracket$) distincts.

Soit $\Lambda_{i,j} = I_p + E_{j,i}$ (resp. $I_n + E_{i,j}$).

D'après le calcul préliminaire, il est clair que $A\Lambda_{i,j}$ se déduit de A en ajoutant C_j à C_i et que $\Lambda_{i,j}A$ se déduit de A en ajoutant L_j à L_i .

Théorème. $\Lambda_{i,j}$ est inversible.

Remarque. On peut étoffer les opérations élémentaires avec $\Lambda_{i,j}(\lambda) = I_p + \lambda E_{j,i}$ qui rajoutera λ fois une colonne à une autre.

4) Opérations élémentaires et rang.

Théorème. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.

Démonstration. La multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible ne modifie pas le rang de cette matrice.

5) Méthode du pivot de GAUSS.

Lemme du pivot de GAUSS.

Soit A une matrice de format (n, p) dont la première ligne est non nulle.

A peut être transformée par opérations élémentaires en une matrice A_1 de même format de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A'_1 \end{pmatrix} \text{ où } \text{rg}A_1 = \text{rg}A \text{ (ou encore } \text{rg}A'_1 = \text{rg}A - 1).$$

Démonstration. Si $a_{1,1} = 0$, il existe $j > 1$ tel que $a_{1,j}$ soit non nul. On échange alors la colonne C_j et la colonne C_1 pour obtenir une matrice de même rang que A et dont le premier coefficient est non nul.

Puis par division de la première colonne de cette matrice par ce coefficient non nul, on obtient une matrice de même rang que A dont le coefficient ligne 1, colonne 1, est égal à 1.

Il reste enfin à remplacer chaque colonne C_j d'indice $j > 1$ et de premier coefficient $a'_{1,j}$ par $C_j - a'_{1,j}C_1$ pour parvenir à la forme voulue sans avoir modifié le rang de A .

Détermination du rang de A par la méthode du pivot de GAUSS.

Si A est nulle, $\text{rg}A = 0$. Sinon, quitte à échanger deux lignes de A ce qui ne modifie pas son rang, on se ramène à une matrice dont la première ligne est non nulle et A a même rang qu'une matrice de la forme $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A'_1 \end{pmatrix}$. Le rang de A est $1 + \text{rg}A'_1$ car la première colonne de A' et les $p - 1$ dernières engendrent des sous espaces supplémentaires.

En réitérant, A a même rang qu'une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \\ & & \times & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \times & \dots & \times & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$
 Le rang de A est le nombre de

colonnes non nulles de cette dernière matrice.

6) Rang et matrices équivalentes.

Théorème. Soit A une matrice de format (n, p) et de rang r non nul. A est équivalente à la matrice J_r de format (n, p) définie par blocs :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } I_r \text{ est la matrice identité de format } r.$$

Réciproquement, une matrice équivalente à J_r est de rang r .

Démonstration 1. Dans la démonstration précédente, on a multiplié A à droite par des matrices inversibles dont le

$$\text{produit est noté } V \text{ pour obtenir } AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \\ & & \times & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \times & \dots & \times & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on peut encore multiplier à gauche cette dernière matrice par un produit de matrices inversibles noté U pour obtenir $UAV = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r$ ou encore $A = U^{-1}J_rV^{-1}$ ce qui montre que toute matrice de rang r est équivalente à la matrice J_r .

Démonstration 2. Soit A une matrice de format (n, p) et de rang r non nul.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker } f) = p - r$. Soit $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{r+1 \leq i \leq p}$ une base de $\text{Ker } f$ si $r < p$ ou $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ si $r = p$. $\mathcal{B}_0$ est une famille libre de $\mathbb{K}^p$ que l'on peut compléter en $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$ base de $\mathbb{K}^p$. On sait que la restriction de f à $\text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un isomorphisme de $\text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ sur $\text{Im } f$. Par suite, si on pose $\forall i \in [1, r], e'_i = f(e_i)$, la famille $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une base de $\text{Im } f$ que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$.

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice J_r ce qui montre encore une fois que A est équivalente à J_r .

Théorème. Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si ces deux matrices ont même rang.

Théorème. $\text{rg } A = \text{rg}(^t A)$.

VI - Matrices de permutations

1) Définition. Soit σ une permutation de $[1, n]$. La matrice $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice (de permutation) associée à σ . Le coefficient ligne i , colonne j de P_σ vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

Exemple. Si $\sigma = (4213)$ alors $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2) Propriétés.

Théorème. $\forall (\sigma, \sigma') \in (S_n)^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

Démonstration. Le coefficient ligne i , colonne j de $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma(k)} \delta_{k, \sigma'(j)} = \delta_{i, \sigma(\sigma'(j))}$$

qui est bien le coefficient ligne i , colonne j , de $P_{\sigma \circ \sigma'}$.

Théorème. $\forall \sigma \in S_n, P_\sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Théorème. Soit $G = \{P_\sigma, \sigma \in S_n\}$. $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ isomorphe à $(S_n, \circ)$.

Théorème. $\forall \sigma \in S_n, \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ (signature)

Démonstration.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1), 1} \dots p_{\sigma'(n), n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \delta_{\sigma'(1), \sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n), \sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

(car $\delta_{\sigma'(1), \sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n), \sigma(n)} = 1 \Leftrightarrow \forall k \in [1, n], \sigma(k) = \sigma'(k) \Leftrightarrow \sigma = \sigma'$).

3) Produit d'une matrice par une matrice de permutation.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice de format (p, n) et P_σ la matrice associée à σ permutation donnée de $[1, n]$ (resp.

$[1, p]$). Alors $AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)})$ (resp. $P_\sigma A = \begin{pmatrix} L_{\sigma^{-1}(1)} \\ \dots \\ L_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$).

Démonstration. Le coefficient ligne i , colonne j de AP_σ vaut $\sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k, \sigma(j)} = a_{i, \sigma(j)}$ et le coefficient de $P_\sigma = \sum_{k=1}^p \delta_{i, \sigma(k)} a_{k,j} = a_{\sigma^{-1}(i), j}$.

VII - Trace d'une matrice carrée et trace d'un endomorphisme

1) Définition.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée. La trace de A est le nombre $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

2) Propriétés.

Théorème. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr} A + \mu \text{Tr} B$.

Théorème. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}({}^t A) = \text{Tr} A$.

Théorème. $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Démonstration. $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j} \right) = \text{Tr}(BA)$.

Théorème. Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration. $\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(APP^{-1}) = \text{Tr} A$.

Danger. $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA) \neq \text{Tr}(ACB)$ en général. Par exemple, $\text{Tr}(E_{1,1} \times E_{1,2} \times E_{2,1}) = \text{Tr}(E_{1,1}) = 1$ et $\text{Tr}(E_{1,1} \times E_{2,1} \times E_{1,2}) = \text{Tr}(0) = 0$.

3) Trace d'un endomorphisme.

La trace d'un endomorphisme f d'un espace E de dimension n est la trace de sa matrice dans une base donnée de E (ne dépend pas du choix de la base puisque deux matrices semblables ont mêmes traces).

VIII - Calculs par blocs

1) Combinaisons linéaires.

On découpe une matrice $A = (a_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq p}$ de format (n, p) en blocs (ou cellules) $A_{i,j}$ de format (n_i, p_j) où $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$ et $n_1 + \dots + n_s = n, p_1 + \dots + p_t = p$.

Avec des notations évidentes, si $A = (A_{i,j})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$ alors $\lambda A + \mu B = (\lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$.

2) Multiplication.

Pour calculer par blocs le produit AB , le découpage de A en colonnes doit être identique au découpage de B en lignes.

On découpe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ de format (n, p) en $A = (A_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$ où $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ et $n_1 + \dots + n_r = n, p_1 + \dots + p_s = p$ et une matrice $B = (b_{k,l})_{1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q}$ de format (p, q) en $B = (B_{i,j})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t}$ où $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$ et $p_1 + \dots + p_s = p, q_1 + \dots + q_t = q$.

Si, pour $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq t$, on pose $C_{i,j} = \sum_{k=1}^s A_{i,k} B_{k,j}$, alors $AB = (C_{i,j})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq t}$.