

Planche n° 2. Algèbre linéaire II

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (*) :** Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme g de E tel que $f = g \circ p$.

n° 2 (I) :** Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie n et f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p(x) = 0$. Montrer que f est nilpotent.

n° 3 (*) :** Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient f et g deux projecteurs distincts et non nuls de E tels qu'il existe deux complexes a et b tels que :

$$fg - gf = af + bg.$$

- 1) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ on a $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$. En déduire que $gf = f$ puis que $a + b = 0$ puis que $a = -1$.
- 2) Montrer que si $a \neq 0$ et $a \neq -1$, on a $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$. Que peut-on en déduire ?
- 3) Montrer que si f et g sont deux projecteurs qui ne commutent pas et vérifient de plus $fg - gf = af + bg$ alors (a, b) est élément de $\{(-1, 1), (1, -1)\}$. Caractériser alors chacun de ces cas.

n° 4 (*) :** Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F .

- 1) Montrer que $[(\forall g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0) \Rightarrow f \text{ bijective}]$.
- 2) On pose $\dim E = p$, $\dim F = n$ et $\text{rg } f = r$. Calculer la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(F, E) / f \circ g \circ f = 0\}$.

n° 5 (I) :** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. u est l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, u(P) = P(X+1) - P$.

- 1) Déterminer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.

$$2) \text{ Déterminer explicitement une base dans laquelle la matrice de } u \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{n° 6 (***) : Rang de la matrice } \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) \\ \cos(a) & \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) \\ \cos(2a) & \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) \\ \cos(3a) & \cos(4a) & \cos(5a) & \cos(6a) \end{pmatrix}.$$

n° 7 (*) :** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i = j$, j si $i = j - 1$ et 0 sinon. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

n° 8 (*) :** Soient n un entier naturel non nul puis $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit f l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice X associe $AX + XA$. Calculer $\text{Tr}(f)$.

n° 9 ()** : Soient a un réel non nul et A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M : $aM + \text{Tr}(M)A = B$.

n° 10 ()** : Rang de la matrice $(i + j + ij)_{1 \leq i,j \leq n}$.

n° 11 ()** : Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x, y) = xI + yJ, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- 1) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et préciser sa dimension.
- 2) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- 3) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(E, +, \times)$?
- 4) Résoudre dans E les équations : **a)** $X^2 = I$ **b)** $X^2 = 0$ **c)** $X^2 = X$.
- 5) Calculer $(M(x, y))^n$ pour n entier naturel et x et y réels.

n° 12 (*) :** On appelle idéal bilatère de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ tout sous-ensemble I de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

a) $(I, +)$ est un groupe et b) $\forall A \in I, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM \in I$ et $MA \in I$.

Déterminer tous les idéaux bilatères de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

n° 13 (*) :** Soient $a_1, \dots, a_n$ n réels tous non nuls et $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$.

Inverse de A en cas d'existence ?

n° 14 ()** : Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices carrées de format n telles que $a_{i,j} = 0$ si $j \leq i+r-1$ et $b_{i,j} = 0$ si $j \leq i+s-1$ où r et s sont deux entiers donnés entre 1 et n . Montrer que si $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $c_{i,j} = 0$ si $j \leq i+r+s-1$.

n° 15 (I)** : Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & \binom{n-1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \dots & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{n-1}{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$.

n° 16 (I)** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j,k \leq n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

n° 17 (I)** : Soit A une matrice carrée de format n . Calculer le déterminant de sa comatrice.

n° 18 (I)** : Soit A une matrice carrée de format n . Etudier le rang de $\text{com}A$ en fonction du rang de A .

n° 19 (*) :** Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $M = \text{com}M$ ($n \geq 2$).

n° 20 (I)** : (**Théorème de HADAMARD.**) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. (Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.)

n° 21 (*I) : Existe-t-il deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

n° 22 (I)** : Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe un complexe a tel que $f = a \text{Tr}$.

n° 23 (*) :** Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ (a réel donné). Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n$.

n° 24 ()** : Soient A une matrice carrée de format n et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe MA . Trouver la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ordonnée par l'ordre lexicographique).

n° 25 (*) :** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B l'élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $B = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de B en fonction du rang de A .

n° 26 (*) :** Soit H un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists \lambda_A \in \mathbb{C} / HAH = \lambda_A H$. Montrer que $\text{rg} H \leq 1$.

n° 27 (*) :** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) M^2 = 0 \text{ et } (2) \text{rg} M \leq 1 \text{ et } \text{tr} M = 0.$$

n° 28 (*) :** Soient A et B deux matrices carrées de format n telles que $AB - BA = A$. Calculer la trace de A^{2010} .

n° 29 ()** : Soient $M(a) = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix}$ et $N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$. $M(a)$ et $N(a)$ sont-elles semblables ?

n° 30 (*) :** Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

n° 31 ()** : **(Exponentielle d'une matrice nilpotente)**

Pour A matrice nilpotente donnée, on pose $\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

1) Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A + B$ est nilpotente et $\exp(A + B) = \exp A \times \exp B$.

2) Montrer que $\exp A$ est inversible.

3) Calculer $\exp A$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.