

# Résumé de Math Sup : déterminants

## I - Applications multilinéaires

### 1) Définition.

Soient  $E_1, \dots, E_n$ ,  $F$   $n + 1$  espaces vectoriels. Soit  $f$  une application de  $E_1 \times \dots \times E_n$  dans  $F$ .

$f$  est  $n$ -linéaire  $\Leftrightarrow f$  est linéaire par rapport à chaque variable

$$\Leftrightarrow \forall (a_i)_{1 \leq i \leq n}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ l'application } \begin{matrix} E_i & \rightarrow & F \\ x_i & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{matrix} \text{ est linéaire.}$$

Exemple. Dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien orienté,  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est bilinéaire.  
 $(x, y) \mapsto x \wedge y$

Si  $E_1 = \dots = E_n = E$  et  $F = \mathbb{K}$ , on obtient les formes  $n$ -linéaires sur  $E$ .

### 2/ Formes symétriques, antisymétriques, alternées.

**Définition.** Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ .

- 1)  $f$  est symétrique  $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$ .
- 2)  $f$  est antisymétrique  $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \sigma \in S_n, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$ .
- 3)  $f$  est alternée  $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, [(\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0]$ .

**Théorème.**  $f$  est antisymétrique  $\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall \tau$  transposition de  $\llbracket 1, n \rrbracket, f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Démonstration.** Soit  $\sigma \in S_n$ , on écrit  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$  où les  $\tau_i$  sont des transpositions et on sait que  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ .

**Théorème.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K}$  sous-corps de  $\mathbb{C}$ ) puis  $f$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ .

$f$  alternée  $\Leftrightarrow f$  antisymétrique.

**Démonstration.**

$\Rightarrow$  / Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ . Soient  $i \neq j$  puis  $\tau = \tau_{i,j}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Donc pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , pour toute transposition  $\tau, f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$  et  $f$  est antisymétrique.

$\Leftarrow$  / Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  tel qu'il existe  $i \neq j$  tel que  $x_i = x_j = x$ .

L'égalité  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$  s'écrit encore  $f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n)$  ou encore  $2f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = 0$  ou enfin  $f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = 0$ .

## II- Formes $n$ -linéaires alternées sur un espace de dimension $n$ . Définition de la forme déterminant dans une base

**1) Théorème fondamental.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . On note  $\Lambda_n^*(E)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ .

**Théorème.** 1)  $\Lambda_n^*(E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

2) Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base donnée de  $E$ , il existe une et une seule forme  $f$   $n$ -linéaire alternée sur  $E$  telle que  $f(\mathcal{B}) = 1$ .

**Définition.** L'unique forme  $f$   $n$ -linéaire alternée sur  $E$  telle que  $f(\mathcal{B}) = 1$  s'appelle la forme déterminant dans la base  $\mathcal{B}$  et se note  $\det_{\mathcal{B}}$ .

**Démonstration.** Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ . Pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , posons  $x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$  (où les  $x_{i,j}$  sont dans  $\mathbb{K}$ ).

Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . En développant  $f(x_1, \dots, x_n)$  par  $n$ -linéarité, on obtient une somme de  $n^n$  termes du type  $x_{\chi(1),1} \dots x_{\chi(n),n} f(e_{\chi(1)}, \dots, e_{\chi(n)})$  où  $\chi$  est une application quelconque de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même.

$f$  est alternée et les termes correspondant aux applications  $\chi$  telles que  $\exists i \neq j / \chi(i) = \chi(j)$ , sont nuls. Donc tous les termes pour lesquels  $\chi$  n'est pas injective disparaissent. Maintenant,  $\llbracket 1, n \rrbracket$  étant un ensemble fini,  $\chi$  est injective si et seulement si  $\chi$  est une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur lui-même ou encore une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Il ne reste donc que les termes du type  $x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} f(e_1, \dots, e_n)$  où  $\sigma$  est une élément quelconque de  $S_n$ .

On a montré que nécessairement

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}.$$

Pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , posons  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$ .

- $\varphi$  est une forme  $n$ -linéaire sur  $E$  car linéaire par rapport à chaque variable.
- $\varphi$  est non nulle car  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \delta_{\sigma(1),1} \dots \delta_{\sigma(n),n} = 1$ .
- $\varphi$  est alternée. En effet, soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  tel que  $x_i = x_j$  pour un certain couple  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ . Soit  $\tau = \tau_{i,j}$ . On sait que si  $A_n$  est l'ensemble des permutations paires,  $A_n \tau$  est l'ensemble des permutations impaires. Donc

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in A_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} x_{\sigma\tau(1),1} \dots x_{\sigma\tau(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(i),i} \dots x_{\sigma(j),j} \dots x_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(j),i} \dots x_{\sigma(i),j} \dots x_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in A_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(i),i} \dots x_{\sigma(j),j} \dots x_{\sigma(n),n} - \sum_{\sigma \in A_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(j),j} \dots x_{\sigma(i),i} \dots x_{\sigma(n),n} \text{ (car } x_i = x_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement,  $\Lambda_n^*(E) = \text{Vect}(\varphi)$  avec  $\varphi \neq 0$  et  $\Lambda_n^*(E)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

On a vu que  $\varphi(\mathcal{B}) = 1$  et que si  $f \in \Lambda_n^*(E)$ ,  $f = f(\mathcal{B})\varphi$ . Par suite,  $f(\mathcal{B}) = 1 \Leftrightarrow f = \varphi$ .

## 2) Propriétés.

**Théorème.**

- 1)  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .
- 2)  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ .
- 3)  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$ .
- 4)  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')$ .

**Démonstration.** On applique :  $\forall f \in \Lambda_n^*(E)$ ,  $f = f(\mathcal{B})\varphi$ .

## 3) Applications.

**a) Théorème.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$  et  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ .

**Démonstration.** Si  $\mathcal{B}'$  est une base,  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$  et en particulier  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ .

Si  $\mathcal{B}'$  n'est pas une base, puisque  $\text{card}(\mathcal{B}) = n$ ,  $\mathcal{B}'$  est liée. Par suite, l'un des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  est combinaison linéaire des autres vecteurs de  $\mathcal{B}'$ . Par  $n$  linéarité de  $\det_{\mathcal{B}}$  et puisque  $\det_{\mathcal{B}}$  est alternée, on a bien  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$ .

### b) Orientation.

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E \neq \{0\}$ . On définit la relation : «  $\mathcal{B}'$  a même orientation que  $\mathcal{B} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$  ».

La relation précédente est une relation d'équivalence à deux classes. On appelle arbitrairement l'une des deux classes, classe des bases directes et l'autre, classe des bases indirectes. L'espace  $E$  est alors orienté.

## III - Déterminant d'une matrice . Déterminant d'un endomorphisme .

### 1) Déterminant d'un endomorphisme.

#### a) Définition.

(Remarque. L'ordre de présentation 1) déterminant d'un endomorphisme 2) déterminant d'une matrice est un ordre qui permet de parvenir facilement à  $\det(AB) = \det A \times \det B$ ).

Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire alternée non nulle sur  $E$  (de dimension finie non nulle  $n$ ) et soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $f_u$  définie par :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,  $f_u(x_1, \dots, x_n) = f(u(x_1), \dots, u(x_n))$ .

$f_u$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . Donc il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,  $f_u(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$  ou encore telle que  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,  $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$ .

Montrons que  $\lambda$  ne dépend que de  $u$  et pas de  $f$ .

Soit  $g$  une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . Puisque  $\dim \Lambda_n^*(E) = 1$ , il existe un scalaire  $\mu$  tel que  $g = \mu f$ . Donc pour  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$$g(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \mu f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda \mu f(x_1, \dots, x_n) = \lambda g(x_1, \dots, x_n).$$

**Définition.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Le déterminant de  $u$  est le scalaire noté  $\det(u)$  tel que  $\forall f \in \Lambda_n^*(E)$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$   $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det(u)) \times f(x_1, \dots, x_n)$ .

### b) Propriétés.

**Théorème.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- 1) Pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .
- 2) Pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det(u)$ .

**Théorème.**

- 1)  $\det(\text{Id}) = 1$ .
- 2)  $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ ,  $\det(u \circ v) = (\det u) \times (\det v)$ .
- 3)  $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $(u \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0)$  et dans ce cas,  $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$ .

**Démonstration.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

- 1)  $\det(\text{Id}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .
- 2)  $\det(u \circ v) = \det_{\mathcal{B}}(u(v(\mathcal{B}))) = (\det u) \det_{\mathcal{B}}(v(\mathcal{B})) = (\det u)(\det v)$ .
- 3) Si  $u \in \text{GL}(E)$ ,  $(\det u)(\det(u^{-1})) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(\text{Id}) = 1 \neq 0$ .  
Si  $\det u \neq 0$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det u \neq 0$  et  $u(\mathcal{B})$  est une base de  $E$  puis  $u \in \text{GL}(E)$ .

**Théorème.**  $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda u) = \lambda^n (\det u)$ .

Danger. En général,  $\det(u + v) \neq \det u + \det v$ .

### 2) Déterminant d'une matrice carrée.

#### a) Définition.

Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , le déterminant de  $A$  est le nombre  $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ .

Notation.  $\det A = |a_{i,j}|_{1 \leq i,j \leq n}$ .

#### b) Propriétés.

**Théorème.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  de matrice  $A$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  donnée. Alors  $\det(u) = \det(A)$ .

**Théorème.** Deux matrices semblables ont même déterminant

**Théorème.** 1) L'application  $\det : (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}, \times)$  est un morphisme et l'application

$$A \mapsto \det A$$

$\det : (\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$  est un morphisme de groupes.

$$A \mapsto \det A$$

2)  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ ,  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ .

3)  $\det(I_n) = 1$ .

4)  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $[A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0]$  et dans ce cas  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .

Le noyau du morphisme de groupes  $\det : (\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$  c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées de

$$A \mapsto \det A$$

déterminant 1 est un sous-groupe de  $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$  noté  $\text{SL}_n(\mathbb{K})$  (groupe spécial linéaire).

**Théorème.**  $\det A = \det({}^t A)$ .

**Démonstration.**  $\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$ .

Soit  $\sigma$  un élément donné de  $S_n$ . Si on pose  $i_1 = \sigma(1)$ , ...,  $i_n = \sigma(n)$ , alors  $\sigma^{-1}(i_1) = 1$ , ...,  $\sigma^{-1}(i_n) = n$ .

Le monôme  $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$  s'écrit  $a_{\sigma^{-1}(i_1),i_1} \dots a_{\sigma^{-1}(i_n),i_n}$  ou encore  $a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n}$ , après avoir remis dans l'ordre les  $n$  facteurs. Donc,

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

car l'application  $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$  est une permutation de  $S_n$  (puisque application involutive de  $S_n$  dans lui-même).

## IV - Calculs de déterminants

1) **Transposition.**  $\det A = \det({}^t A)$  et donc toutes les règles portant sur les colonnes sont encore valables sur les lignes.

2) **Matrices triangulaires.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux (se montre directement en revenant à la définition).

#### 3) Opérations élémentaires.

a)  $\forall \sigma \in S_n$ ,  $\det(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_1, \dots, C_n)$ . Quand on permute des colonnes, le déterminant est multiplié par la signature de la permutation.

b) Si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, le déterminant garde la même valeur.

c)  $\det$  est  $n$ -linéaire et donc  $\det(C_1, \dots, C_i + C'_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n)$  et  $\det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_n)$ .

Danger.  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$  en général et  $\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, \lambda C_n) = \lambda^n \det(C_1, \dots, C_n) = \lambda^n \det A$ .

#### 4) Calculs par blocs.

**Théorème.** Si les  $A_i$  sont des matrices carrées,  $\det \begin{pmatrix} A_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix} = (\det A_1)(\det A_2) \dots (\det A_p)$ .

**Démonstration.** On le montre pour  $p = 2$  puis on termine par récurrence.

On montre que  $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = (\det A)(\det B)$  où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .

Soit  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ .  $\varphi$  « est » une application  $n$ -linéaire alternée des colonnes de  $X$ .

$$X \mapsto \det \begin{pmatrix} X & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Donc, il existe une constante  $k$  (indépendante de  $X$ ) telle que  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\varphi(X) = k(\det X)$  avec  $k = k \det(I_n) = \varphi(I_n)$  ce qui montre que  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det \begin{pmatrix} X & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det X \times \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ .

De même, l'application  $\psi : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  « est » une application  $p$ -linéaire alternée des lignes de  $Y$ .

$$Y \mapsto \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Donc, il existe une constante  $k'$  (indépendante de  $Y$ ) telle que  $\forall Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $\psi(Y) = k'(\det Y)$  avec  $k' = k' \det I_p = \psi(I_p)$ .

Ceci montre que  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\forall Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $\det \begin{pmatrix} X & C \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \det X \times \det Y \times \det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ . Enfin le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit de ses coefficients diagonaux et donc  $\det \begin{pmatrix} I_n & C \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = 1$ .

#### 5) Développement suivant une ligne ou une colonne.

**Théorème.** Soient  $m_{i,j}$  le mineur de  $a_{i,j}$  et  $A_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j} = \text{cofacteur de } a_{i,j}$ . Alors,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k} \quad (\text{développement suivant la ligne } i) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j} \quad (\text{développement suivant la colonne } j) \end{aligned}$$

**Démonstration.** Il suffit de démontrer la formule de développement suivant une colonne car  $\det A = \det({}^t A)$ .

Ensuite, il suffit de démontrer la formule de développement suivant la première colonne car alors, si on veut développer suivant la colonne  $j$ , on effectue la permutation des colonnes  $C_j \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \dots \rightarrow C_{j-1}$  dont la signature est  $(-1)^{j-1}$  (signature d'un cycle de longueur  $j$ ), puis en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\det A = (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^n a_{k,j} (-1)^{k+1} m_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j}.$$

Il reste à démontrer la formule de développement suivant la première colonne.

$C_1$  est somme de  $n$  colonnes du type  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  et par  $n$ -linéarité du déterminant,  $\det A = \sum_{i=1}^n \det A_i$  où

$$\det A_i = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Si  $i = 1$ , un calcul de déterminant par blocs fournit  $\det A_1 = a_{1,1} A_{1,1}$ .

Si  $i \geq 2$ , on passe  $L_i$  en  $L_1$ ,  $L_1$  en  $L_2, \dots, L_{i-1}$  en  $L_i$ . On obtient

$$\det A_i = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,2} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,2} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = A_{i,1} \text{ (calcul par blocs)}$$

et finalement  $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,1} A_{i,1}$ .

## V - Comatrice. Inverse d'une matrice .

La comatrice de la matrice carrée  $A$  de format  $n$  est la matrice, notée  $\text{com}A$ , dont le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , est le cofacteur de l'élément  $a_{i,j}$  de  $A$ , c'est-à-dire si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , alors  $\text{com}(A) = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . La transposée de la comatrice de  $A$  est appelée matrice complémentaire de  $A$  et est notée  $\tilde{A}$ .

### Théorème.

1)  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$  ou encore  $A({}^t\text{com}A) = ({}^t\text{com}A)A = (\det A)I_n$ .

2)  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $(A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0)$  et dans ce cas,  $A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t\text{com}A)$ .

**Démonstration.** Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de  $A{}^t\text{com}A$  vaut  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k}$ .

• Si  $i = j$ , cette expression n'est autre que le développement de  $\det A$  suivant sa  $i$ -ème ligne et vaut donc  $\det A$ .

• Si  $i \neq j$ ,  $\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{j,k}$  est le développement suivant la ligne  $j$  du déterminant déduit de  $\det A$  en remplaçant la ligne  $j$  de  $\det A$  par sa ligne  $i$  (et en ne modifiant pas sa ligne  $i$ ). Cette expression est donc nulle puisque égale à un déterminant ayant deux lignes identiques.

Ensuite, il est clair que  $\text{com}({}^tA) = {}^t(\text{com}A)$  (à partir de la définition de  $\text{com}A$ ) et donc  $\tilde{A}A = ({}^t\text{com}A)A = \text{com}({}^tA){}^t({}^tA) = {}^t({}^tA{}^t(\text{com}({}^tA))) = {}^t((\det({}^tA)I_n)) = (\det A)I_n$ .