

Planche n° 3. Dualité

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 (I) :** 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par : $\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E, \varphi_a \in E^*$.

2) Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \dots, \varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa préduale.

3) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

n° 2 ()** : Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E, \varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une base de E^* et trouver la base dont elle est la duale.

n° 3 ()** : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et φ et ψ deux formes linéaires sur E . On suppose que pour tout x de E , on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

n° 4 (*) :** 1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et φ $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que : $\left(\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \varphi_i \subset \text{Ker} \varphi \right)$.

2) Signification du résultat précédent : dans $\mathbb{R}^3$, équation d'un plan P contenant $D : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$ et le vecteur $u = (1, 1, 1)$?

n° 5 (*) :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ n formes linéaires sur un $\mathbb{K}$ -espace E de dimension n . Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0$.

n° 6 ()** : Rang du système de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ f_2 &= x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\ f_3 &= x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\ f_4 &= x_2 - 3x_3 - mx_4 \end{aligned} \quad ?$$