

Planche n° 3. Dualité. Corrigé

Dans les corrigés qui suivent, on ne suppose pas connue la notion d'orthogonalité au sens de la dualité.

n° 1 : 1) Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

Donc, φ_a est une forme linéaire sur E .

2) On a déjà $\text{card}(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n} = n+1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ est libre.

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$. Chaque P_k est un élément de E et de plus

$$\forall (j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases} \quad (*).$$

Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j &= 0 \Rightarrow \forall P \in E, \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j(P_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta_{j,k} = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ est libre et donc une base de E^* . Les égalités (*) montrent alors que la préduale de la base $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ de E^* est la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

3) Pour $P \in E$, posons $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$. φ est une forme linéaire sur E et donc, puisque la famille $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ est une base de E^* , il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout

$$P \in E, \int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n) \quad (\text{les } \lambda_j \text{ étant indépendants de } P).$$

En appliquant cette dernière égalité au polynôme P_k , $0 \leq k \leq n$, on obtient $\lambda_k = \int_0^1 P_k(t) dt = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{t - a_j}{a_k - a_j} dt$.

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) \text{ où } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{t - a_j}{a_k - a_j} dt.$$

n° 2 : Les quatre applications $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ et ψ_2 sont effectivement des formes linéaires sur E .

Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. On note (P_0, P_1, P_2, P_3) cette future base.

- On doit avoir $\varphi_1(P_2) = \varphi_2(P_2) = \psi_2(P_2) = 0$ et $\psi_1(P_2) = 1$. Ainsi, P_2 s'annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1) = 0$. Donc P_2 admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque P_2 est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante a telle que $P_2 = aX(X-1)^2 = aX^3 - 2aX^2 + aX$ puis $P_2'(0) = 1$ fournit $a = 1$ puis $P_2 = X(X-1)^2$.

- De même, il existe une constante a telle que $P_3 = aX^2(X-1) = aX^3 - aX^2$ et $1 = P_3'(1) = 3a - 2a$ fournit $P_3 = X^2(X-1)$.

- P_0 admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes a et b telles que $P_0 = (aX+b)(X-1)^2$ puis les égalités $P_0(0) = 1$ et $P_0'(0) = 0$ fournissent $b = 1$ et $a - 2b = 0$. Par suite, $P_0 = (2X+1)(X-1)^2$.

- P_1 admet 0 pour racine double et il existe deux constantes a et b telles que $P_1 = (aX+b)X^2$ puis les égalités $P_1(1) = 1$ et $P_1'(1) = 0$ fournissent $a + b = 1$ et $3a + 2b = 0$ et donc $P_1 = (-2X+3)X^2$.

$$P_0 = (2X+1)(X-1)^2, P_1 = (-2X+3)X^2, P_2 = X(X-1)^2 \text{ et } P_3 = X^2(X-1).$$

Montrons alors que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* . Cette famille est libre car si $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\psi_1 + d\psi_2 = 0$, on obtient en appliquant successivement à P_0, P_1, P_2 et P_3 , $a = b = c = d = 0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une famille libre de E^* de cardinal 4 et donc une base de E^* . Sa préduale est (P_0, P_1, P_2, P_3) .

n° 3 : 1 ère solution. On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi = 0 \Rightarrow \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \text{Ker}\psi \subset \text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \text{ ou } \text{Ker}\varphi \subset \text{Ker}\psi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

2ème solution. Supposons que $\varphi\psi = 0$ et qu'il existe x et y tels que $\varphi(x) \neq 0$ (et donc $\psi(x) = 0$) et $\psi(y) \neq 0$ (et donc $\varphi(y) = 0$). Alors $0 = \varphi(x+y)\psi(x+y) = (\varphi(x) + \varphi(y))(\psi(x) + \psi(y)) = \varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\forall(\varphi, \psi) \in (E^*)^2, (\forall x \in E, \varphi(x)\psi(x) = 0) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.}$$

n° 4 : 1) Soit $\varphi \in E^*$.

• $\Rightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n$.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_n\varphi_n(x) = 0 + \dots + 0 = 0$ et donc $x \in \text{Ker}\varphi$. On a montré que

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi.$$

• $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^* en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ un élément de E .

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$$

(avec la convention usuelle $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ dans le cas $p = n$). Donc $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i = \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$.

Soit alors $\varphi \in E^*$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$.

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p) \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j \in \llbracket n+1, p \rrbracket, \varphi(e_j) = 0$$

$$\Rightarrow \forall j \in \llbracket n+1, p \rrbracket, \lambda_j = 0 \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

Si tous les $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i = E$ puis $\text{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, φ est combinaison linéaire des $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$.

Si les $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ génératrice de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, étant combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}, 1 \leq k \leq m$, chaque

$\text{Ker}\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, contient $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi$.

D'après l'étude du cas où la famille est libre, φ est combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}, 1 \leq k \leq m$ et donc des $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2) Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P = \text{Ker}\varphi$ (en particulier φ n'est pas nulle). Soient φ_1 la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ et φ_2 la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 2x + 3z$. Alors la famille (φ_1, φ_2) est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D = \text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux),}$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Une équation de P est donc $5(x + y + z) - 3(2x + 3z) = 0$ ou encore $-x + 5y - 4z = 0$.

n° 5 : Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

• Si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre, c'est une base de E^* (car $\dim(E^*) = n$). Notons $(u_1, \dots, u_n)$ sa préduale et notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on a $f(u_i) = e_i$. Ainsi, l'image par f d'une base de E est une base de $\mathbb{K}^n$ et on sait alors que f est un isomorphisme. En particulier, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

• Si les φ_i sont tous nuls, tout vecteur non nul x annule chaque φ_i . Supposons alors que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée et que les φ_i ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ (avec $1 \leq m < n$) de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}, \psi_1, \dots, \psi_{n-m})$ de E^* . On note $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ s'annulent toutes en e_n et donc chaque φ_i s'annule en e_n puisque chaque φ_i est combinaison linéaire des φ_{i_k} , $1 \leq i \leq m$. Le vecteur e_n est donc un vecteur non nul x tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i(x) = 0$.

n° 6 : La matrice de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$.

La matrice A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$ (pour $2 \leq j \leq 3$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$) puis que la

matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$)

• Si $m = 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $\text{rg}(A) = 3$.

• Si $m \neq 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3$) puis que la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$ ($C_4 \leftarrow 2C_4 + (m-2)C_3$)

Donc, si $m = 4$, $\text{rg}(A) = 3$ et si m n'est ni 0 ni 4, $\text{rg}(A) = 4$.

Si $m \notin \{0, 4\}$, $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 4$ et si $m \in \{0, 4\}$, $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3$.