

Planche n° 4. Déterminants

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

n° 2 (*)** : On définit par blocs une matrice A par $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A , B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n , p et q avec $p + q = n$. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times \det(C)$.

n° 3 (*)** : (Déterminants de VANDERMONDE).

Soient $x_0, \dots, x_{n-1}$ n nombres complexes. Calculer $\text{Van}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$.

n° 4 (**)** : (Déterminant de Cauchy). Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ nombres complexes tels que toutes les sommes $a_i + b_j$, $1 \leq i, j \leq n$, soient non nulles. Calculer $C_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Cas particulier : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = b_i = i$ (déterminant de HILBERT).

n° 5 ()** : Résoudre le système $MX = U$ où $M = (j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, $U = (\delta_{i,1})_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et X est un vecteur colonne inconnu.

n° 6 ()** : Calculer $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont n réels donnés ($n \geq 2$).

n° 7 ()** : Calculer $\det(a_i + b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont $2n$ complexes donnés.

n° 8 ()** : Calculer $\det((a + i + j)^2)_{1 \leq i,j \leq n}$ où a est un complexe donné.

n° 9 (**)** : Soient $x_1, \dots, x_n$ n entiers naturels tels que $x_1 < \dots < x_n$. A l'aide du calcul de $\det(C_{x_j}^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$, montrer que $\prod_{1 \leq i,j \leq n} \frac{x_j - x_i}{j - i}$ est un entier naturel.

n° 10 (**)** : (Déterminants circulants).

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes. Calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det A$. Pour cela, on calculera

d'abord $A\Omega$ où $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j,k \leq n}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

n° 11 (*)** : 1) Soient $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $d = \det(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d' .

2) Application : calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

n° 12 (*)** : Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n . Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

n° 13 (*)** : Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n . Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

n° 14 (*) :** Soit A une matrice carrée complexe de format n ($n \geq 2$) telle que pour tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$, on ait $\det(A + M) = \det A + \det M$. Montrer que $A = 0$.

n° 15 (I) :** Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A - xI_n)$.

n° 16 () :** Calculer les déterminants suivants :

1) $\det A$ où $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (n \geq 2)$$

$$4) \text{ (I)} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} \quad (n \geq 2).$$