

Planche n° 5. Réduction

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour n entier relatif donné, calculer A^n par trois méthodes différentes.

n° 2 ()** : Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

n° 3 ()** : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que A n'est pas diagonalisable.

2) Déterminer $\text{Ker}(A - I)^2$.

3) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

4) Calculer A^n pour n entier naturel donné.

n° 4 (*)** : Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$.

Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f . f est-il diagonalisable ?

n° 5 (*)** : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E , soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\text{Ker}f$, $\text{Im}f$ et les valeurs et vecteurs propres de f .

n° 6 (*)** : Soit A une matrice rectangulaire de format (p, q) et B une matrice de format (q, p) . Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA .

n° 7 (*) I** : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent. Montrer que $\det(u + v) = \det u$.

n° 8 (**)** : Soit A une matrice carrée de format n .

Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Tr}(A^k) = 0$.

n° 9 (*) I** : Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $fg - gf = f$. Montrer que f est nilpotent.

n° 10 (**)** : Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / uv - vu = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

n° 11 (*)** : Soit $E = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\text{matrices carrées de format } 2 \text{ à coefficients dans } \mathbb{Z} \text{ et de déterminant } 1\}$.

1) Montrer que $(E, \times)$ est un groupe

2) Soit A un élément de E tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

n° 12 (**)** : Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

n° 13 (**)** : Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et M l'élément de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

Calculer $\det M$. Déterminer les éléments propres de M puis montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

n° 14 (*) :** Soient a et b deux réels tels que $|a| \neq |b|$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de A sont cocycliques. (Indication : pour calculer χ_A ,

considérer $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.)

n° 15 (*) I) : (matrices stochastiques).**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} \in [0, 1]$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de A .

2) Soit λ une valeur propre de A .

a) Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

b) Montrer qu'il existe un réel ω de $[0, 1]$ tel que $|\lambda - \omega| \leq 1 - \omega$. Conséquence géométrique ?

n° 16 ()** : Soit A une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.

n° 17 ()** : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.

n° 18 (*) I) : (déterminant circulant).**

1) Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (de format $n \geq 3$). Diagonaliser J_n .

2) En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

n° 19 (*) I) : (matrices de permutations).**

Pour $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, on définit la matrice P_σ par $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1) Calculer $\det(P_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.

2) a) Montrer que $\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

b) On pose $G = \{P_\sigma, \sigma \in S_n\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à S_n .

3) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer AP_σ .

4) Trouver les valeurs propres d'une matrice de permutation (on pourra utiliser le résultat hors programme : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).

n° 20 (*) : (Décomposition de DUNFORD).**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d, n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent et $f = d + n$.

n° 21 ()** : Trouver une matrice carrée A vérifiant $A^4 - 3A^3 + A^2 - I = 0$.

n° 22 (I) :** Calculer
$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

n° 23 (*) :** Soit A une matrice carrée de format 2 telle que A^2 est diagonalisable et $\text{Tr}A \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

n° 24 (*) :** $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour f élément de E , $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } (\varphi(f))(0) = f(0).$$

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- 2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ .
- 3) Déterminer les éléments propres de φ .

n° 25 (*) :** Sur E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On donne trois endomorphismes f , u et v tels qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour $k \in \{1, 2, 3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Montrer que f est diagonalisable.

n° 26 (I) :** Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

n° 27 (*) :** Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle qui commutent. Montrer que f et g sont simultanément trigonalisables.

n° 28 ()** : Soient A et B deux matrices carrées complexes de format n . Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

n° 29 ()** : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

n° 30 ()** : (ESTP1994) Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ et $M_{1,1}$?

n° 31 (**)** : Trouver A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la comatrice de A soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

n° 32 ()** : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont n nombres complexes ($n \geq 2$). A est-elle diagonalisable ?

n° 33 (*) :** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A . Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 3) A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

n° 34 (*) :** Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

n° 35 : Commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

n° 36 () :** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f . On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F .

n° 37 (I) :** Soit A une matrice carrée réelle de format $n \geq 2$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est un entier pair.