

Planche n° 7. Intégration

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 : Etudier l'existence des intégrales suivantes

- 1) (**) $\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}\right) dx$
- 2) (**) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) dx$
- 3) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx$
- 4) (***) $\int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}} dx$
- 5) (**) $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}} dx$
- 6) (**) $\int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx$
- 7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}} dx$
- 8) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$
- 9) (**) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} dx$
- 10) (**) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$
- 11) (**) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} dx$
- 12) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{Arccos}(1-x)} dx.$

n° 2 : Même énoncé.

- 1) (***) I $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b x} dx$ (Intégrales de BERTRAND)
- 2) (**) $\int_0^{\pi/2} (\tan x)^a dx$
- 3) (**) $\int_1^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$
- 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x^b)} dx$

n° 3 : (Hors programme) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

- 1) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$
- 2) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ ($a > 0$)
- 3) (**) $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$
- 4) (**) $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$
- 5) (**) $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$
- 6) (****) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3 \sin^2 x} dx.$

n° 4 : Existence et calcul de :

- 1) (**) I $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$
- 2) (très long) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} dx$
- 3) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$
- 4) (***) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} dx$
- 5) (***) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$
- 6) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$
- 7) (**) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4} dx$
- 8) (***) $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln \left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$
- 9) (**) I $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx$
- 10) (I très long) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^a} dx$ (calcul pour $a \in \left\{\frac{3}{2}, 2, 3\right\}$)
- 11) (***) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$
- 12) (***) I $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ ($0 < a < b$)

n° 5 : Deux calculs de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

1) (**) I En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$, calculer I (et J).

2) (***) I Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I.

n° 6 (I) :** En utilisant un développement de $\frac{1}{1-t}$, calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$.

n° 7 (*) I) :** Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ (en écrivant $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$).

n° 8 : 1) (I)** Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2) (*)** Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -\ln a$.

3) (*) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$.

n° 9 (*) :** Etude complète de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

n° 10 (*) :** (Hors programme) Convergence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$.

n° 11 (*) :** Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, intégrable sur $[1, +\infty[$.

1) Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2) Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} x(f(x+1) - f(x)) dx$.

n° 12 (*) :** **1)** Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(x) dx$ converge en $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2) a) On suppose que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' admettent des limites réelles quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f' tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

b) En déduire que si les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} f''(x) dx$ convergent alors f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

n° 13 (*) :** Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx \right)$. Cas d'égalité ?