

Planche n° 7. Intégration sur un intervalle quelconque. Corrigé

n° 1 : 1) Pour $x \geq 0$, $x^2 + 4x + 1 \geq 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1}} \sim 32x$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[0; +\infty[$.

2) Pour $x \geq 1$, $1 + \frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f : x \mapsto e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^{1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})} = e - \frac{e}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ puis $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2x}$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

3) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x + e^x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• En 0, $\frac{\ln x}{x + e^x} \sim \ln x$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f .

• En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $2 > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f .

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Donc la fonction $f : x \mapsto (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ est continue sur $[0, +\infty[$.

En $+\infty$, $\ln(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \ln x + \ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right) = \frac{1}{3} \ln x + \ln\left(\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{2}{3} \ln x - \ln 3 + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Par

suite, $\sqrt{x} \ln(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = -\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \ln 3 \sqrt{x} + o(1)$.

Mais alors $x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x - \ln 3 \sqrt{x} + 2 \ln x + o(1)\right)$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$. Finalement $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

5) La fonction $f : x \mapsto e^{-\sqrt{x^2 - x}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp(-\sqrt{x^2 - x} + 2 \ln x) = \exp(-x + o(x))$ et donc $x^2 f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. $f(x)$ est ainsi négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

6) La fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \rightarrow 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.

• Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp(-\ln^2 x + 2 \ln x) \rightarrow 0$. Donc f est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

7) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Quand x tend vers 0, $f(x) \sim \frac{5x - 3x}{x^{5/3}} = \frac{2}{x^{2/3}} > 0$. Puisque $\frac{2}{3} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f .

• En $+\infty$, $|f(x)| \leq \frac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\frac{5}{3} > 1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

8) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ est continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

• En 0, $f(x) \sim -\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

• En 1, $f(x) \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} \sim \frac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.

• En $+\infty$, $x^{3/2}f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

9) La fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$.

f est positive et équivalente en 0 à droite à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ puis par parité sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}} dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et

vaut par parité $2 \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$.

10) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f est donc intégrable sur $] -1, 1[$.

11) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0, 1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\frac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0, 1[$.

12) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\text{Arccos}(1-x)}$ est continue et positive sur $]0, 1[$.

En 0, $\text{Arccos}(1-x) = o(1)$. Donc $\text{Arccos}(1-x) \sim \sin(\text{Arccos}(1-x)) = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{x}$.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0, 1[$.

n° 2 : 1) Pour tout couple de réels (a, b) , la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.

1er cas. Si $a > 1$, $x^{(a+1)/2}f(x) = \frac{1}{x^{(a-1)/2} \ln^b x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\frac{a-1}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées.

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\frac{a+1}{2} > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f . Dans ce cas, f est intégrable sur $[2, +\infty[$.

2ème cas. Si $a < 1$, $x^{(a+1)/2}f(x) = \frac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\frac{1-a}{2} > 0$ et d'après un théorème de croissances comparées.

Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\frac{a+1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f . Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$.

3ème cas. Si $a = 1$. Pour $X > 2$ fixé, en posant $t = \ln x$ et donc $dt = \frac{dx}{x}$ on obtient

$$\int_2^X \frac{1}{x \ln^b} dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b}.$$

Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $b > 1$.

En résumé,

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $a > 1$ ou ($a = 1$ et $b > 1$).

(En particulier, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\frac{1}{x}$ en $+\infty$).

2) Pour tout réel a , la fonction $f : x \mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{f(x)}$.

• **Etude en 0 à droite.** $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a > -1$.

• **Etude en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.** $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a < 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ si et seulement si $-1 < a < 1$.

3) Pour $x \geq 1$, $1 + \frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} (1 - a) + \frac{1 - b}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $a \neq 1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = 1$ et $b \neq 1$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

• Si $a = b = 1$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

En résumé, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a = b = 1$.

4) Pour tout couple (a, b) de réels, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^a(1 + x^b)}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• **Etude en 0.**

-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a < 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a + b < 1$.

• **Etude en $+\infty$.**

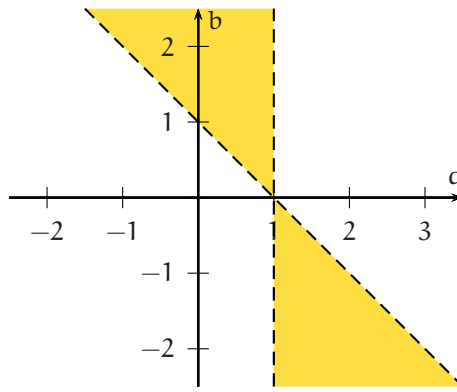
-Si $b > 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a + b > 1$,

-si $b = 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$,

-si $b < 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a > 1$.

En résumé, f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $((b \geq 0 \text{ et } a < 1) \text{ ou } (b < 0 \text{ et } a + b < 1))$ et $((b > 0 \text{ et } a + b > 1) \text{ ou } (b \leq 0 \text{ et } a > 1))$ ce qui équivaut à $(b > 0 \text{ et } a + b > 1 \text{ et } a < 1) \text{ ou } (b < 0 \text{ et } a > 1 \text{ et } a + b < 1)$.

Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.



n° 3 : 1) Soient ε et X deux réels tels que $0 < \varepsilon < X$. Les deux fonction $x \mapsto 1 - \cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos X}{X} - \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^X \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

- La fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_{\varepsilon}^X \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.
- $\left| \frac{1 - \cos X}{X} \right| \leq \frac{1}{X}$ et donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos X}{X} = 0$.
- $\frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon} \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} = 0$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(u)}{4u^2} 2du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge et de plus } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.}$$

2) Soit $a > 0$. La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Sur $]0, 1]$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0, 1]$. Puisque f est équivalente en 0 à $\frac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x) dx$ converge en 0 si et seulement si $a - 1 < 1$ ou encore $a < 2$. On suppose dorénavant $a < 2$.
- Soit $X > 1$. Les deux fonction $x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1, X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x^a} dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a} \right]_1^X - a \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}} dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}} dx.$$

Maintenant, $\left| \frac{\cos x}{x^{a+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{a+1}}$, et puisque $a + 1 > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X \mapsto \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}} dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X \mapsto -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge en $+\infty$.

Finalement

$\forall a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ converge si et seulement si $a < 2$.

3) Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t = x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

$$\int_1^X e^{ix^2} dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{i}{2} \left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2} \int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}} dt \right)$$

Maintenant, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left| \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} \right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left| \frac{e^{it}}{t^{3/2}} \right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, on a montré que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

On en déduit encore que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de FRESNEL).

4) La fonction $f : x \mapsto x^3 \sin(x^8)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = x^4$ fournit

$$\int_0^X x^3 \sin(x^8) dx = \frac{1}{4} \int_0^{X^4} \sin(t^2) dt = \frac{1}{4} \operatorname{Im} \left(\int_0^{X^4} e^{it^2} dt \right).$$

D'après 3), $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ est une intégrale convergente et donc $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ converge.

5) La fonction $f : x \mapsto \cos(e^x)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = e^x$ fournit

$$\int_0^X \cos(e^x) dx = \int_1^{e^X} \frac{\cos t}{t} dt.$$

On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx$ converge.

5) Pour tout réel $x \geq 0$, $1 + x^3 \sin^2 x \geq 1 > 0$ et donc la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^3 \sin^2 x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale proposée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0, +\infty[$, intégrabilité elle-même équivalente à la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + x^3 \sin^2 x} dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n \geq 0$ et d'autre part

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + x^3 \sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{1}{1 + (u + n\pi)^3 \sin^2 u} du \\ &\leq \int_0^\pi \frac{1}{1 + n^3 \pi^3 \sin^2 u} du = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + n^3 \pi^3 \sin^2 u} du \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + n^3 \pi^3 \left(\frac{2u}{\pi} \right)^2} du \quad (\text{par concavité de la fonction sinus sur } [0, \pi]) \\ &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}} \int_0^{(n\pi)^{3/2}} \frac{1}{1 + v^2} dv \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} n^{3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et la série de terme général u_n converge. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^3 \sin^2 x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

n° 4 : 1) I_n existe si et seulement si $n \geq 1$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in]0, +\infty[$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^n} dt &= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n} \right]_0^X + 2n \int_0^X \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt = \frac{X}{(X^2+1)^n} + 2n \int_0^X \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}} dt \\ &= \frac{X}{(X^2+1)^n} + 2n \int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^n} dt - 2n \int_0^X \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions considérées sont toutes intégrables sur $[0, +\infty[$, quand X tend vers $+\infty$ on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

En tenant compte de $I_1 = \frac{\pi}{2}$, on obtient pour $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times I_1 = \frac{((2n) \times (2n-1) \times (2n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1)}{((2n) \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. En posant $t = \tan x$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2 x)^n} \times (1+\tan^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)^{n-1} dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u du$ (intégrales de WALLIS).

2) On pose $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} dx$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{x^7}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}$ est donc intégrable sur $[2, +\infty[$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$. $X^4+1 = (X-e^{i\pi/4})(X-e^{-i\pi/4})(X+e^{i\pi/4})(X+e^{-i\pi/4})$ et la décomposition en éléments simples de f sur $\mathbb{C}$ s'écrit

$$f = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{b}{X-e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{b}}{X-e^{-i\pi/4}} + \frac{c}{X+e^{i\pi/4}} + \frac{\bar{c}}{X+e^{-i\pi/4}}.$$

- $a_3 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^3 f(x) = \frac{1}{1^4+1} = \frac{1}{2}$ puis

$$f(x) - \frac{1}{2(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)} - \frac{1}{2(x-1)^3} = \frac{1-x^4}{2(x-1)^3(x^4+1)} = -\frac{x^3+x^2+x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)}$$

- $a_2 = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^3+x^2+x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)} \times (x-1)^2 = -1$ puis

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} &= -\frac{x^3+x^2+x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-(x^3+x^2+x+1) + 2(x^4+1)}{2(x-1)^2(x^4+1)} \\ &= \frac{2x^4-x^3-x^2-x+1}{2(x-1)^2(x^4+1)} = \frac{2x^3+x^2-1}{2(x-1)(x^4+1)} \end{aligned}$$

- $a_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+x^2-1}{2(x-1)(x^4+1)} \times (x-1) = \frac{1}{2}$ puis

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-1)} &= \frac{2x^3+x^2-1}{2(x-1)(x^4+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{(2x^3+x^2-1) - (x^4+1)}{2(x-1)(x^4+1)} \\ &= \frac{-x^4+2x^3+x^2-2}{2(x-1)(x^4+1)} = \frac{-x^3+x^2+2x+2}{2(x^4+1)}. \end{aligned}$$

- Posons $\alpha = e^{i\pi/4}$. On a $\alpha^4 = -1$ et aussi

$$\frac{-X^3 + X^2 + 2X + 2}{2(X^4 + 1)} = \frac{b}{X - \alpha} + \frac{\bar{b}}{X - \bar{\alpha}} + \frac{c}{X + \alpha} + \frac{\bar{c}}{X + \bar{\alpha}}$$

$$b = \frac{-\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 2}{2 \times 4\alpha^3} = \frac{-\alpha^4 + \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha}{2 \times 4\alpha^4} = -\frac{1 + \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha}{8} \text{ puis en tenant compte de } \alpha\bar{\alpha} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{X - \alpha} + \frac{\bar{b}}{X - \bar{\alpha}} &= \frac{1}{8} \left(-\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 1}{X - \alpha} - \frac{\bar{\alpha}^3 + 2\bar{\alpha}^2 + 2\bar{\alpha} + 1}{X - \bar{\alpha}} \right) \\ &= \frac{-X(2 + \sqrt{2}) + 4 + 3\sqrt{2}}{8(X^2 - X\sqrt{2} + 1)} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{16} \times \frac{2X - \frac{2(4 + 3\sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} \\ &= -\frac{2 + \sqrt{2}}{16} \times \frac{2X - (4 + 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} = -\frac{2 + \sqrt{2}}{16} \times \frac{2X - 2 - 2\sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} \\ &= -\frac{2 + \sqrt{2}}{16} \left(\frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} - \frac{2 + \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant $\sqrt{2}$ par $-\sqrt{2}$, on obtient

$$\frac{c}{X + \alpha} + \frac{\bar{c}}{X + \bar{\alpha}} = \frac{-2 + \sqrt{2}}{16} \left(\frac{2X + \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} - \frac{2 - \sqrt{2}}{X^2 + X\sqrt{2} + 1} \right).$$

En résumé, pour tout $x \in [2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)^3} - \frac{2 + \sqrt{2}}{16} \left(\frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{2 + \sqrt{2}}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right) \\ &\quad + \frac{-2 + \sqrt{2}}{16} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Primitive de f. Une primitive de f sur $[2, +\infty[$ est la fonction F telle que $\forall x \in [2, +\infty[$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{16} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \frac{(2 + \sqrt{2})^2 \sqrt{2}}{16} \operatorname{Arctan}(x\sqrt{2} - 1) \\ &\quad + \frac{-2 + \sqrt{2}}{16} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \frac{(2 - \sqrt{2})^2 \sqrt{2}}{16} \operatorname{Arctan}(x\sqrt{2} + 1) \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{16} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \frac{4 + 3\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan}(x\sqrt{2} - 1) \\ &\quad + \frac{-2 + \sqrt{2}}{16} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan}(x\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Pour la limite en $+\infty$, on regroupe d'une part

$$\frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{8} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{8} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{(x-1)^4}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} \right)$$

qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et d'autre part

$$-\frac{\sqrt{2}}{16} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{16} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) = \frac{\sqrt{2}}{16} \ln \left(\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right)$$

qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{(4 + 3\sqrt{2}) + (-4 + 3\sqrt{2})}{8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8},$$

et on trouve

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(2) \\ &= \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{4} + \frac{2 + \sqrt{2}}{16} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{2 - \sqrt{2}}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - \frac{4 + 3\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan}(2\sqrt{2} - 1) + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{8} \operatorname{Arctan}(2\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

3) On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dominée par $\frac{1}{x^3}$ en $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $[0, +\infty[$.

Le changement de variables $t = \frac{1}{x}$ fournit $I = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1 + \frac{1}{t^3}} \times -\frac{dt}{t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^3} dt$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x + 1}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{x^n}$. Par suite, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $n \geq 2$.

Soit $n \geq 2$. La décomposition en éléments simples de f s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x + k},$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \lim_{x \rightarrow -k} (x + k)f(x) = \frac{1}{(-k + 1) \dots (-k + (k - 1))(-k + (k + 1)) \dots (-k + n)} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k - 1)!(n - k)!} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{k C_n^k}{n!}. \end{aligned}$$

Une primitive de f est donc la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k C_n^k \ln(x + k)$.

Quand x tend vers $+\infty$, $F(x) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \ln x + o(1)$. Cette expression a une limite réelle si et seulement si $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$.

Puisque f est intégrable au voisinage de $+\infty$, on a donc nécessairement $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$ puis $F(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. Il reste

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)} dx = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k k C_n^k \ln(k).$$

5) • Si $a = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$ est continue et intégrable sur $[0, 1[$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x}} dx = 2$.

• Si $a \neq 0$, $-\frac{1}{a}$ est dans $[0, 1[$ si et seulement si $a < -1$. Dans ce cas, le segment $[0, 1[$ contient un intervalle ouvert sur lequel $(1-x)(1+ax) < 0$ et l'intégrale proposée n'existe pas.

• Si $a \geq -1$, puisque $(1-x)(1+ax)$ est strictement positif sur un voisinage à droite de 0 et que $-\frac{1}{a}$ n'est pas dans $[0, 1[$, $(1-x)(1+ax) > 0$ pour $x \in [0, 1[$. Dans ce cas, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$.

Si $a > -1$, $\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et dans ce cas, la fonction f est intégrable sur un voisinage de 1.

Si $a = -1$, $\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} = \frac{1}{1-x}$ et dans ce cas, la fonction f n'est pas intégrable sur un voisinage de 1.

En résumé, la fonction f est intégrable sur $[0, 1[$ si et seulement si $a > -1$.

Calcul de $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$ pour $a > -1$ et $a \neq 0$.

Pour $x \in [0, 1[$, $\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} = \frac{1}{1-x} \sqrt{\frac{1-x}{1+ax}}$. On pose $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+ax}}$ et donc $x = \frac{-u^2+1}{au^2+1}$ et $dx = \frac{-2(a+1)u}{(au^2+1)^2} du$.
On obtient

$$I = \int_1^0 u \times \frac{1}{1 - \frac{-u^2+1}{au^2+1}} \times \frac{-2(a+1)u}{(au^2+1)^2} du = 2 \int_0^1 \frac{1}{au^2+1} du.$$

Donc, si $a > 0$, $I = \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arctan}(u\sqrt{a}) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{a})$ et si $-1 < a < 0$, $I = \left[\frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{argth}(u\sqrt{-a}) \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{argth}(\sqrt{-a})$.

$$\forall a > -1, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{argth}(\sqrt{-a}) & \text{si } -1 < a < 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{a}) & \text{si } a > 0 \end{cases}.$$

6) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, équivalente au voisinage de $+\infty$ à e^{-x} . La fonction f est donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$ puis intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose $u = e^x$ et donc $x = \ln u$ puis $dx = \frac{du}{u}$. On obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+u)\left(1+\frac{1}{u}\right)} \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2} du = \frac{1}{2}$$

7) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4}$ est continue positive sur $[0, +\infty[$ car pour tout $x \geq 0$, $5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4 \geq 4 > 0$.

En $+\infty$, $\frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4} \sim e^{-x}$ et donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose $u = e^x$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{5 \operatorname{ch} x + 3 \operatorname{sh} x + 4} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\frac{5}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right) + \frac{3}{2} \left(u - \frac{1}{u}\right) + 4} \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4u^2 + 4u + 1} du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(2u+1)^2} du = \left[-\frac{1}{2(2u+1)} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

8) La fonction $f : t \mapsto 2 + (t+3) \ln \left(\frac{t+2}{t+4} \right)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et de signe constant au voisinage de $+\infty$. L'intégrabilité de f équivaut donc à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ pour la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \left(2 + (t+3) \ln \left(\frac{t+2}{t+4} \right) \right) dt$. Soit $x > 0$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} F(x) - 2x &= \int_0^x (t+3) \ln \left(\frac{t+2}{t+4} \right) dt = \left[\frac{(t+3)^2}{2} \ln \left(\frac{t+2}{t+4} \right) \right]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x (t+3)^2 \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+4} \right) dt \\ &= \frac{(x+3)^2}{2} \ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) + \frac{9}{2} \ln 2 - \int_0^x \frac{(t+3)^2}{(t+2)(t+4)} dt \\ &= \frac{(x+3)^2}{2} \ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) + \frac{9}{2} \ln 2 - \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{2(t+4)} \right) dt \\ &= \frac{(x+3)^2}{2} \ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) + \frac{9}{2} \ln 2 - x - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall x > 0, F(x) = x + \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 8) \ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) + 4 \ln 2.$$

Maintenant quand x tend vers $+\infty$

$$\ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) = \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{4}{x} \right) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x} - \frac{2x^2}{x^2} \frac{8}{x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

et donc

$$\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 8) \ln \left(\frac{x+2}{x+4} \right) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 8) \left(-\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} + o \left(\frac{1}{x^2} \right) \right) = -x - 3 + o(1)$$

et finalement $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 4 \ln 2 - 3 + o(1)$. Ceci montre l'intégrabilité de la fonction f sur $[0, +\infty[$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln \left(\frac{t+2}{t+4} \right) \right) dt = 4 \ln 2 - 3.}$$

9) La fonction $f : x \mapsto \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, équivalente en $+\infty$ à $\frac{\pi}{2x^3}$ et donc est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction f est donc intégrable sur $[0, +\infty[$. Posons alors $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx$.

1er calcul. On pose $u = \frac{1}{x}$ et on obtient

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{u} \right)}{\left(1 + \frac{1}{u^2} \right)^2} \frac{-du}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} u \right)}{(u^2 + 1)^2} du = -I + \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u}{(u^2 + 1)^2} du$$

et donc $2I = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2(1+u^2)} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$ ce qui fournit

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8}.}$$

2ème calcul. Soit $X > 0$. Une intégration par parties fournit

$$\int_0^X \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx = \left[-\frac{1}{2(x^2+1)} \operatorname{Arctan} x \right]_0^X + \frac{1}{2} \int_0^X \frac{1}{x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(X^2+1)} \operatorname{Arctan} X + \frac{1}{2} \int_0^X \frac{1}{x^2+1)^2} dx$$

et quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{Arctan} x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1)^2} dx$. On pose alors $x = \tan t$ et on obtient

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2} (1+\tan^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t)) dt = \frac{\pi}{8}.$$

10) Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^a}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prologable par continuité en 0 et équivalente en $+\infty$ à $\frac{\ln x}{x^{2a-1}}$. Cette dernière expression est elle-même négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ pour les trois valeurs de a envisagées. La fonction f est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ quand $a \in \left\{\frac{3}{2}, 2, 3\right\}$. On pose alors $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^a} dx$.

Calcul quand $a = 2$. On pose $u = \frac{1}{x}$. On obtient $I_2 = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u} \ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2} \frac{-du}{u^2} = -I_2$ et donc $I_2 = 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = 0.$$

Calcul quand $a = 3$. Une intégration par parties fournit

$$\int \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3} dx = -\frac{1}{4} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x(1+x^2)^2} dx$$

puis en posant $u = x^2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u(u+1)^2} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\ln(x^2) - \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \right) + C \end{aligned}$$

Finalement, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3}$ sur $]0, +\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{4} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{8} \ln \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{8} \frac{1}{x^2+1}$. Quand x tend vers $+\infty$, $F(x)$ tend vers 0. Pour trouver la limite de F en 0, on écrit

$$F(x) = \frac{1}{8} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right) \ln x = \frac{1}{8} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + \frac{x+2}{4(x+1)^2} x \ln x$$

et donc $F(x)$ tend vers $\frac{1}{8}$ quand x tend vers 0. Ainsi, $I_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = -\frac{1}{8}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3} dx = -\frac{1}{8}.$$

Calcul quand $a = \frac{3}{2}$. Une intégration par parties fournit

$$\int \frac{x \ln x}{(x^2+1)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ln x + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ln x + \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx$$

En posant $u = x^2$, on obtient $\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{u+1}} du$ puis en posant $v = \sqrt{u+1} = \sqrt{x^2+1} > 1$, on obtient

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u\sqrt{u+1}} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{v(v^2-1)} 2dv = \int \frac{1}{v^2-1} dv = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{v-1}{v+1} \right) + C.$$

Une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$ est donc la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ln x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right)$.

Déjà, $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Pour la limite en 0, on écrit

$$\ln \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right) = \ln \left(\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2} \right) = 2 \ln x - 2 \ln (\sqrt{x^2+1}+1),$$

et donc

$$F(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \ln x - \ln (\sqrt{x^2+1}+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} x \ln x - \ln (\sqrt{x^2+1}+1)$$

On en déduit que $F(x)$ tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers 0 et donc que $I_{3/2} = \ln 2$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^{3/2}} dx = \ln 2.$$

11) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

En $\frac{\pi}{2}$ à gauche, $0 < \sqrt{\tan x} = \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur un voisinage de

$\frac{\pi}{2}$ à gauche. Finalement, la fonction f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut noter $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$.

On pose $u = \sqrt{\tan x}$ et donc $\tan x = u^2$ puis $(1 + \tan^2 x) dx = 2u du$ et donc $dx = \frac{2u du}{1+u^4}$. On obtient $I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du$.

Or $u^4 + 1 = u^4 + 2u^2 + 1 - 2u^2 = (u^2 + 1 - u\sqrt{2})(u^2 + 1 + u\sqrt{2})$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{1+u^4} &= \frac{u^2}{(u^2 + u\sqrt{2} + 1)(u^2 - u\sqrt{2} + 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} - \frac{u}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - u\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{\left(u + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

Par suite, une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{2u^2}{u^4+1}$ sur $[0, +\infty[$ est la fonction

$$F : u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{u^2 - u\sqrt{2} + 1}{u^2 + u\sqrt{2} + 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Arctan}(u\sqrt{2} - 1) + \operatorname{Arctan}(u\sqrt{2} + 1) \right)$$

On en déduit que $I = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

12) La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 car $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} b - a + o(1)$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soit x un réel strictement positif. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$ et $t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ et on peut écrire

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt.$$

En posant $u = at$ et donc $\frac{du}{u} = \frac{dt}{t}$, on obtient $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ et de même $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt = \int_{bx}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Maintenant, pour $x > 0$, l'encadrement $e^{-bx} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{u} du \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du \leq e^{-ax} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{u} du$ fournit

$$e^{-ax} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du \leq e^{-ax} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Finalement,

$$\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } 0 < a < b, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

n° 5 : La fonction $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x) \sim \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

1) Soient $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$. Le changement de variables $x = \frac{\pi}{2} - t$ fournit J existe et $J = I$. Par suite,

$$\begin{aligned} 2I = I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin u) du \\ &= -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin u) du \right) = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - t)) (-dt) \right) = -\frac{\pi \ln 2}{2} + I. \end{aligned}$$

Par suite, $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

2) Pour $n \geq 2$, posons $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$ et donc $P_n > 0$. D'autre part, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\frac{n\pi}{2n} = 1$. On en déduit que

$$P_n^2 = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$\begin{aligned} P_n^2 &= \prod_{k=1}^{2n-1} \frac{e^{ik\pi/(2n)} - e^{-ik\pi/(2n)}}{2i} = \frac{1}{(2i)^{2n-1}} \prod_{k=1}^{2n-1} (-e^{-ik\pi/(2n)}) \prod_{k=1}^{2n-1} (1 - e^{2ik\pi/(2n)}) \\ &= \frac{1}{(2i)^{2n-1}} (-1)^{2n-1} (e^{-i\pi/2})^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} (1 - e^{2ik\pi/(2n)}) = \frac{1}{2^{2n-1}} \prod_{k=1}^{2n-1} (1 - e^{2ik\pi/(2n)}) \end{aligned}$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n-1$ dont les racines sont les $2n-1$ racines $2n$ -èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n} - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + \dots + X^{2n-1}$$

et donc $\prod_{k=1}^{2n-1} (1 - e^{2ik\pi/(2n)}) = Q(1) = 2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n = \sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, posons alors $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \frac{\pi}{2}$ est une subdivision de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à pas constant égal à $\frac{\pi}{2n}$.

Puisque la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $\frac{\pi}{2n} \ln(\sin(x_k)) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\sin x) dx$ puis en sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi}{2n} \ln(P_n) \leq \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$$

De même, pour $0 \leq k \leq n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \ln(\sin x) dx \leq \frac{\pi}{2n} \ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx \leq \frac{\pi}{2n} \ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n \geq 2$, $\frac{\pi}{2n} \ln(P_n) + \int_0^{\pi/(2n)} \ln(\sin x) dx \leq I \leq \frac{\pi}{2n} \ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n) = \ln n - (n-1) \ln 2$ et donc $\frac{\pi}{2n} \ln(P_n)$ tend vers $-\frac{\pi \ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\int_0^{\pi/(2n)} \ln(\sin x) dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$), on a redémontré que $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

n° 6 : La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0, 1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0, 1[$.

1ère solution. (à la main, sans utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Pour $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1} = \frac{-\ln t}{1-t} = -\sum_{k=0}^n t^k \ln t + \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1}$$

Pour $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = -t^n \ln t$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Chaque fonction f_k , $0 \leq k \leq n$, est continue sur $]0, 1[$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0, 1[$ et donc sur $]0, 1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t} = \frac{\ln t}{t-1} + \sum_{k=0}^n t^k \ln t$ et

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = -\sum_{k=0}^n \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt$$

• La fonction $g : t \mapsto \frac{t \ln t}{t-1}$ est continue sur $]0, 1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0, 1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt \right| \leq \int_0^1 t^n |g(t)| dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt = 0$. On en déduit que la série de terme général $-\int_0^1 t^k \ln t dt$ converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^k \ln t) dt.$$

- Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_{\varepsilon}^1 (-t^k \ln t) dt = \left[-\frac{t^{k+1} \ln t}{k+1} \right]_{\varepsilon}^1 + \frac{1}{k+1} \int_{\varepsilon}^1 t^k dt = \frac{\varepsilon^{k+1} \ln \varepsilon}{k+1} + \frac{1 - \varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_{\varepsilon}^1 (-t^k \ln t) dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

2ème solution. (utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0, 1[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0, 1[$ et de plus, la fonction f est continue sur $]0, 1[$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$.

n° 7 : La fonction $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0, 1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$. Chacune des deux fonctions $t \mapsto \frac{t}{\ln t}$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0, x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u = t^2$ et on obtient $\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^x \frac{2t}{\ln(t^2)} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln u} du$ et donc

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt.$$

On note alors que, puisque $x \in]0, 1[$, $x^2 < x$. Pour $t \in [x^2, x]$, on a $t \ln t < 0$ et donc $\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{\ln t}$ puis par croissance de l'intégrale, $\int_{x^2}^x \frac{x}{t \ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{x^2}{t \ln t} dt$ et donc

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt$$

Maintenant, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0, 1[$,

$$x^2 \ln 2 \leq \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt \leq x \ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2.}$$

n° 8 : 1) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2} \sim \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{-t^2} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right).$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right)' dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2},$$

et donc

$$e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

2) Pour $a > 0$ fixé, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice n° 3)) puis

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx &= -\int_1^a \frac{\cos x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{=} -\int_1^a \frac{\cos x}{x} dx + O(1) \\ &\underset{a \rightarrow 0}{=} -\int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^a \frac{1 - \cos x}{x} dx + O(1) \underset{a \rightarrow 0}{=} -\ln a + \int_1^a \frac{1 - \cos x}{x} dx + O(1). \end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1 - \cos x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ et en particulier, $\frac{1 - \cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0, 1]$ et en particulier, $\int_1^a \frac{1 - \cos x}{x} dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{=} -\ln a + O(1)$ et finalement

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \underset{a \rightarrow 0}{\sim} -\ln a.$$

3) Soit $a > 0$.

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx - \frac{1}{a^2} \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{x^3 + a^2} - \frac{1}{a^2} \right) dx \right| = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^3 + a^2)a^2} dx \leq \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{a^2} + o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + a^2} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.$$

n° 9 : • Domaine de définition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x, 0[\subset [x, x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.

Si $0 < x < 1$, $[x^2, x] \subset]0, 1[$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2, x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t < 0$ pour tout t de $]0, 1[$.

Si $x > 1$, $[x, x^2] \subset]1, +\infty[$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x, x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.

Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

f est définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et strictement positive sur D .

• **Dérivabilité.** Soit I l'un des deux intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur I . Soit F une primitive de cette fonction sur I .

Si $x \in]0, 1[$, on a $[x^2, x] \subset]0, 1[$ et donc $f(x) = F(x^2) - F(x)$. De même, si $x \in]1, +\infty[$. On en déduit que f est de classe C^1 sur D . De plus, pour $x \in D$,

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

• **Variations.** f' est strictement positive sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).

• **Etude en 0.** Soit $x \in]0, 1[$. On a $0 < x^2 < x < 1$ et de plus la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2, x] \subset]0, 1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0, 1[$. Donc, $\frac{x-x^2}{\ln x} \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \leq \frac{x-x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{x^2-x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f le prolongement).

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,

- f est continue sur $[0, 1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0, 1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.

D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $f'(0) = 0$.

• **Etude en 1.** On a vu au n° 7 que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue). On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).

Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(1) = 1$.

En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et d'après plus haut f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• **Etude en $+\infty$.** Pour $x > 1$, $f(x) \geq x^2 - x \ln x$. Donc $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

• **Convexité.** Pour $x \in D$, $f''(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.

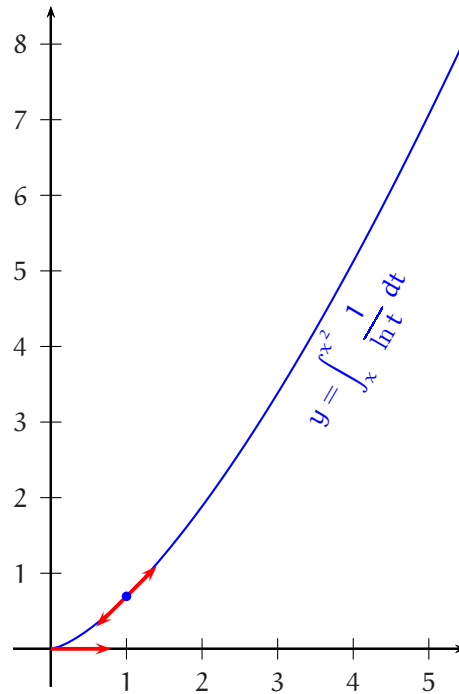
En 1, en posant $x = 1 + h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{(1+h)\ln^2(1+h)} = \frac{(1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) - h}{h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{2} + o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $f''(1) = \frac{1}{2}$.

Pour $x \neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. La fonction g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Donc pour $x \neq 1$, $g(x) > g(1) = 0$. On en déduit que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) > 0$ et donc que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.

• Graphe.



n° 10 : La fonction $f : x \mapsto \frac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$. Soient X un réel élément de $[2, +\infty[$ et $n = E(X)$.

$$\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx.$$

Or, $\left| \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx \right| \leq \frac{X-n}{n} \leq \frac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_n^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = 0$.

D'autre part, la suite $\left((-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)_{k \geq 1}$ est de signe alternée et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $k \geq 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.

Il en est de même de $\int_1^X \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^n \left(-\ln \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} \right) \\ &= \ln \left(\frac{(1 \times 3 \times \dots \times (2n-1))^2 \times (2n+1)}{(2 \times 4 \times \dots \times (2n))^2} \right) = \ln \left(\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right)^2 \times (2n+1) \right). \end{aligned}$$

D'après la formule de STIRLING,

$$\frac{1}{2^{4n}} \times \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right)^2 \times (2n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^{4n}} \times \frac{\left(\frac{2n}{e} \right)^{4n} (\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e} \right)^{4n} (\sqrt{2\pi n})^4} \times (2n) = \frac{2}{\pi}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)$ et on a montré que

$$\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right).$$

n° 11 : 1) Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, pour $x \geq 2$ on a

$$0 \leq xf(x) = 2 \left(x - \frac{x}{2} \right) f(x) \leq 2 \int_{x/2}^x f(t) dt = 2 \left(\int_{x/2}^{+\infty} f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt \right)$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$ alors $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{x} \right)$.

2) La fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Soit $X \geq 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^X x(f(x) - f(x+1)) dx &= \int_1^X xf(x) dx - \int_2^{X+1} (x-1)f(x) dx = \int_1^X xf(x) dx - \int_2^{X+1} xf(x) dx + \int_2^{X+1} f(x) dx \\ &= \int_1^2 xf(x) dx - \int_X^{X+1} xf(x) dx + \int_2^{X+1} f(x) dx. \end{aligned}$$

Maintenant $0 \leq \int_X^{X+1} xf(x) dx \leq (X+1-X)(X+1)f(X) \leq 2Xf(X)$. D'après 1), cette dernière expression tend vers 0 quand

X tend vers $+\infty$. Donc, quand X tend vers $+\infty$, $\int_1^X x(f(x) - f(x+1)) dx$ tend vers $\int_1^2 xf(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx$.

Puisque la fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, on sait que $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si la fonction $X \mapsto \int_1^X x(f(x) - f(x+1)) dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} x(f(x) - f(x+1)) dx = \int_1^2 xf(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx.$$

n° 12 : 1) Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, pour $x \geq 0$, $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si f a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Si de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, il est exclu d'avoir $\ell \neq 0$ et réciproquement si $\ell = 0$ alors $\int_0^x f'(t) dt$ tend vers $-f(0)$ quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ converge si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2) a) Soit $x \geq 0$. D'après la formule de TAYLOR-LAGRANGE, il existe un réel $\theta_x \in]x, x+1[$

$$f(x+1) = f(x) + (x+1-x)f'(x) + \frac{1}{2}f''(\theta_x).$$

ce qui s'écrit encore $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\theta_x)$. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x+1) - f(x)$ tend vers 0 et d'autre part, θ_x tend vers $+\infty$. Ainsi, si f et f'' ont une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, f' a également une limite réelle et de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$.

Ensuite, puisque pour $x \geq 0$, $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ et $\int_0^x f''(t) dt = f'(x) - f'(0)$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t) dt$ convergent et d'après 1), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ ($= \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$).

b) Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$. F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $F'(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt$ tend vers $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t) dt$. Donc F et F'' ont des limites réelles en $+\infty$. D'après a), $f = F'$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

n° 13 : L'inégalité $|ff''| \leq \frac{1}{2}(f^2 + f'^2)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour X et Y tels que $X \leq Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x) dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x) dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $+\infty$ et Y tend vers $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x) dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff' .

Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\int_0^{+\infty} f'^2(x) dx = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisamment grand, $f(x)f'(x) \geq 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geq x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. De même la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$. Si cette limite est un réel non nul ℓ , supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisamment grand, on a $f(x)f'(x) \geq \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0)) \geq \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2 . Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.

Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x) dx$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x) dx \right)^2 = \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x) dx \right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a l'égalité si et seulement si la famille (f, f'') est liée.

Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.

Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.