

Planche n° 8. Suites et séries de fonctions

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 : Etudier les suites de fonctions suivantes (convergence simple, convergence uniforme, convergence localement uniforme)

$$1) \text{ (**) } f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad 2) \text{ (***) } f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad 3) \text{ (***) } f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

n° 2 (* I) :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

2) A l'aide de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

n° 3 (* I) :** (Polynômes de BERNSTEIN. Théorème de WEIERSTRASS).

1) Soit f une application continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour n entier naturel non nul, on définit le n -ème polynôme de BERNSTEIN associé à f par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

a) Calculer $B_n(f)$ quand f est la fonction $x \mapsto 1$, quand f est la fonction $x \mapsto x$, quand f est la fonction $x \mapsto x(x-1)$.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X)$.

2) En séparant les entiers k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$ et les entiers k tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha$ ($\alpha > 0$ donné), montrer que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3) Montrer le théorème de WEIERSTRASS : soit f une application continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.

n° 4 (I) :** Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f . Montrer que f est un polynôme.

n° 5 () :** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire que $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x}\right)$.

n° 6 () :** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1) Domaine de définition de f . On étudie ensuite f sur $]1, +\infty[$.

2) Continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

n° 7 () :** Etudier (convergence simple, convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) les séries de fonctions de termes généraux :

$$1) f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \quad 2) f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad 3) f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

n° 8 (I) :** Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x^\alpha} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n\alpha}$.

n° 9 () :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(t) = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \right)$.

1) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de terme général f_n puis la continuité de la somme f .

2) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right)$ à l'aide de la formule de STIRLING.

n° 10 () :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, soit $f_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$.

Etude complète de $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$: domaine de définition, parité, limites, continuité, dérivabilité (vérifier que f n'est pas dérivable en 0), allure du graphe .

n° 11 () :** Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$. Trouver un équivalent simple de f en 0 à droite.

n° 12 (*) :** Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. Trouver un équivalent simple de f en 1 .