

Planche n° 8. Suites et séries de fonctions. Corrigé

n° 1 : 1) Pour tout entier naturel n , f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Convergence simple sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x = 0$, pour tout entier naturel n , $f_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x \neq 0$, $f_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx}$ et de nouveau $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. On peut noter tout de suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et donc $\|f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2}$. On en déduit que $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Si on n'a pas remarqué ce qui précède, on étudie la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ (f_n étant impaire) dans le but de déterminer $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x , $f'_n(x) = n \frac{(1 + n^2 x^2) - x(n^2 x)}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2}$.

Par suite, la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

Puisque la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

Convergence uniforme et localement uniforme sur $]0, +\infty[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge toujours pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ car pour $n \geq 1$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$.

Soit a un réel strictement positif fixé. Soit $n > \frac{1}{a}$. On a $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. Par suite, pour tout réel x de $[a, +\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$.

Donc $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0| = f_n(a)$ pour $n > \frac{1}{a}$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - 0| = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$ et en particulier converge localement uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

2) Convergence simple sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante $f : x \mapsto 1$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Par suite, pour tout entier naturel n , la fonction $|f_n - f|$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 1$ et donc $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence localement uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = f_n - f$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$g'_n(x) = e^{-x} \left(- \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) = - \frac{e^{-x} x^n}{n!}.$$

Si n est pair, la fonction g_n est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

Si n est impair, la fonction g_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Dans les deux cas, si $x \in [a, b]$, $|g_n(x)| \leq \max\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\}$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = a$ ou $x = b$. Donc

$$\sup_{x \in [a, b]} |g_n(x)| = \max\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\} = \frac{g_n(a) + g_n(b) + |g_n(a) - g_n(b)|}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b]$ contenu dans $\mathbb{R}$ ou encore

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers la fonction $f : x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Pour x réel et n entier naturel, on pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Convergence simple. Soit x réel fixé. $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x \in 2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Si $x \notin 2\mathbb{Z}$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(n(1-x)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |1-x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

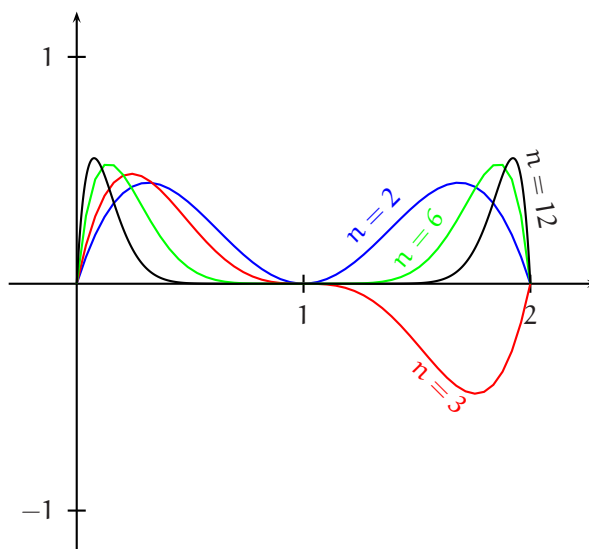
La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2] \cup 2\mathbb{Z}$.

Convergence uniforme sur $[0, 2]$. Soit n un entier naturel non nul fixé.

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - 0| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Cette dernière expression est équivalente à $\frac{\pi}{2e}$ en $+\infty$ et en particulier ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 2]$.



La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 2]$.

n° 2 : Convergence simple sur $\mathbb{R}^+$. Soit x un réel positif fixé. Pour $n > x$, $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ et donc

$$f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(-x + o(1)).$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Pour x réel positif et n entier naturel non nul, posons $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ e^{-x} & \text{si } x > n \end{cases}$. Déterminons la borne supérieure de la fonction $|g_n|$ sur $[0, +\infty[$.

La fonction g_n est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour $x \geq n$, $0 < g_n(x) \leq e^{-n} = g_n(n)$.

Étudions la fonction g_n sur $[0, n]$. Pour $x \in [0, n]$, $g'_n(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$. ($g'_n(n)$ est la dérivée à gauche de la fonction g_n en n , mais on peut montrer qu'en fait la fonction g_n est dérivable en n pour $n > 1$).

La fonction g_n est continue sur le segment $[0, n]$ et admet donc sur $[0, n]$ un minimum et un maximum.

• La fonction g_n a un minimum égal à 0 atteint en 0. En effet, on sait que pour tout réel u , $e^u \geq 1 + u$ (inégalité de convexité) et donc pour tout réel x de $[0, n]$, $e^{-x/n} \geq 1 - \frac{x}{n} \geq 0$. Après élévation des deux membres de cette inégalité, par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $e^{-x} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ ou encore $g_n(x) \geq 0 = g_n(0)$.

• Pour $0 < x \leq n$, les inégalités précédentes sont strictes et la fonction g_n admet son maximum dans $]0, n[$. De plus, $g'_n(n) = -e^{-n} < 0$ et puisque la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, n]$, sa dérivée g'_n est strictement négative sur un voisinage à gauche de n . La fonction g_n est alors strictement décroissante sur ce voisinage et la fonction g_n admet nécessairement son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un certain point x_n de $]0, n[$. En un tel point, puisque l'intervalle $]0, n[$ est ouvert, on sait que la dérivée de la fonction g_n s'annule. L'égalité $g'_n(x_n) = 0$ fournit $\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$ et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) e^{-x_n} = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En résumé, pour tout réel positif x , $0 \leq g_n(x) \leq \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$ où x_n est un certain réel de $]0, n[$.

Pour u réel positif, posons $h(u) = ue^{-u}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $u \geq 0$, $h'(u) = (1 - u)e^{-u}$. Par suite, la fonction h admet un maximum en 1 égal à $\frac{1}{e}$. On a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{ne}$$

ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup\{|g_n(x)|, x \geq 0\} \leq \frac{1}{ne}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{|g_n(x)|, x \geq 0\} = 0$ et on a montré que

la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

2) Existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par suite, I existe dans $\mathbb{R}$.

On est alors en droit d'espérer que $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x^2) dx$.

La fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $[\sqrt{n}, +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto f_n(x^2)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$.

Montrons que I_n tend vers I quand n tend vers $+\infty$.

$$|I - I_n| \leq \int_0^{\sqrt{n}} |f(x^2) - f_n(x^2)| dx + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \times \frac{1}{ne} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{e\sqrt{n}} + \int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = I$.

Calcul de la limite de I_n . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les changements de variables $x = u\sqrt{n}$ puis $u = \cos v$ fournissent

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^1 (1 - u^2)^n du = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} v dv = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

où W_n est la n -ème intégrale de WALLIS. On a déjà vu (voir exercices math sup Planche n° 28, exercice n° 9) que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Finalement, I_n tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Vous pouvez voir différents calculs de l'intégrale de GAUSS dans « Grands classiques de concours : intégration ».

n° 3 : 1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Si $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

• Si $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$,

$$\begin{aligned} B_n(f) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = X \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k} = X. \end{aligned}$$

• Si $\forall x \in [0, 1], f(x) = x(x-1)$, alors $B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1-X)^{n-k}$ et donc $B_1(f) = 0$. Pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$\frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) \binom{n}{k} = -\frac{1}{n^2} k(n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} = -\frac{n-1}{n} \frac{(n-2)!}{(k-1)(n-k-1)!} = -\frac{n-1}{n} \binom{n-2}{k-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} B_n(f) &= -\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=1}^{n-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-2)-(k-1)} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^k (1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X). \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

b) D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 X^k (1-X)^{n-k} - 2nX \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-n) X^k (1-X)^{n-k} - n(2X-1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k (1-X)^{n-k} \\ &\quad + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} - n^2 (2X-1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \\ &= -n(n-1)X(1-X) - n^2 (2X-1)X + n^2 X^2 = -nX^2 + nX = nX(1-X). \end{aligned}$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Soient n un entier naturel non nul et α un réel strictement positif donné. Soit x un réel de $[0, 1]$.

Notons A (resp. B) l'ensemble des entiers $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha$ (resp. $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha$). (Si A ou B sont vides, les sommes ci-dessous correspondantes sont nulles).

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

f est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que si x et y sont deux réels de $[0, 1]$ tels que $|x - y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. α est ainsi dorénavant fixé. Pour ce choix de α ,

$$\sum_{k \in A} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, la fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0, 1]$.

$$\sum_{k \in B} \binom{n}{k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Mais si $k \in B$, l'inégalité $\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha$ fournit $1 \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} (k - nx)^2$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq 1 \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k \in B} \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 n^2} \times nx(1-x) = \frac{1}{\alpha^2 n} \left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}. \end{aligned}$$

En résumé, pour tout réel $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \times \frac{1}{4\alpha^2 n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\alpha^2 n}.$$

Maintenant, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{2\alpha^2 n} = 0$, il existe un entier naturel non nul N tel que pour $n \geq N$, $\frac{M}{2\alpha^2 n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq N$, on a $|f(x) - B_n(f)(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], (n \geq N \Rightarrow |f(x) - (B_n(f))(x)| < \varepsilon,$$

et donc que

la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f .

3) La question 2) montre le théorème de WEIERSTRASS dans le cas du segment $[0, 1]$.

Soient $[a, b]$ un segment quelconque et f une application continue sur $[a, b]$.

Pour $x \in [0, 1]$, posons $g(x) = f(a + (b - a)x)$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et donc il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers g sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $Q_n = P_n \left(\frac{x - a}{b - a} \right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \geq 1$ tel que $\forall n \geq N, \forall y \in [0, 1], |g(y) - P_n(y)| < \varepsilon$.

Soient $x \in [a, b]$ et $n \geq N$. Le réel $y = \frac{x - a}{b - a}$ est dans $[0, 1]$ et

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(a + (b - a)y) - Q_n(a + (b - a)y)| = |g(y) - P_n(y)| < \varepsilon.$$

Ceci démontre que la suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a, b]$.

n° 4 : Posons $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Le critère de CAUCHY de convergence uniforme (appliqué à $\varepsilon = 1$) permet d'écrire

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall m \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_m(x)| \leq 1.$$

Pour $n \geq N$, les polynômes $P_N - P_n$ sont bornés sur $\mathbb{R}$ et donc constants. Par suite, pour chaque $n \geq N$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_N - P_n = a_n$ (*). Puisque la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$, la suite $(a_n) = (P_N(0) - P_n(0))$ converge vers un réel que l'on note a . On fait alors tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité (*) et on obtient

$$f = P_N - a$$

On a montré que f est un polynôme.

n° 5 : 1) Pour $x \in]-1, 1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

Soit $x \in]-1, 1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)| \leq |x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n \geq 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que $f(x)$ existe.

f est définie sur $] -1, 1[$.

Soit $a \in]0, 1[$. Chaque f_n , $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et pour $x \in [-a, a]$,

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour $x \in [-a, a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f'_n(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général f'_n , $n \geq 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $[-a, a]$,
- chaque fonction f_n , $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[-a, a]$,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[-a, a]$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ pour tout réel a de $]0, 1[$ et donc sur $] -1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }] -1, 1[\text{ et } \forall x \in] -1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)).$$

2) Ainsi, pour $x \in] -1, 1[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx} \right) + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix}(1 - xe^{-ix})}{x^2 - 2x \cos x + 1} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{xe^{ix}(1 - xe^{-ix})}{x^2 - 2x \cos x + 1} \right) \\ &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{x^2 - 2x \cos x + 1}. \end{aligned}$$

Mais, pour $x \in] -1, 1[$,

$$\left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + x \cos x)(1 - x \cos x) - x \sin x(-\cos x + x \sin x)}{(1 - x \cos x)^2} = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2}.$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right) \right)' &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right)^2} = \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{(1 - x \cos x)^2 + x^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x + x \cos x - x^2}{x^2 - 2x \cos x + 1} = f'(x). \end{aligned}$$

Finalement, pour $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = 0 + \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right).$$

$$\forall x \in] -1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n} = \operatorname{Arctan} \left(\frac{x \sin x}{1 - x \cos x} \right).$$

n° 6 : 1) Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Pour tout réel x , $f(x)$ existe si et seulement si chaque $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, existe et la série numérique de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{n}$.

Soit donc $x \in D =]0, +\infty[\setminus \left\{ \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Pour $n > \frac{1}{x}$, on a $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante à partir d'un certain et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc $f(x)$ existe.

Le domaine de définition de f est $D =]0, +\infty[\setminus \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

2) Limite de f en $+\infty$. Soit $x > 1$. Donc $f(x)$ existe. Pour tout entier naturel non nul n , $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{\ln(nx)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. On sait alors que la valeur absolue de $f(x)$ est majorée par la valeur absolue du premier terme de la série. Ainsi

$$\forall x > 1, |f(x)| \leq \left| \frac{(-1)^0}{\ln(x)} \right| = \frac{1}{\ln x},$$

et en particulier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On peut noter de plus que pour $x > 1$, $f(x)$ est du signe du premier terme de la série à savoir $\frac{1}{\ln(x)}$ et donc $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) > 0$.

Convergence uniforme sur $]1, +\infty[$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n alternée d'une série alternée, pour $x > 1$ et n naturel non nul,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(kx)} \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)} \right| = \frac{1}{\ln((n+1)x)} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour tout entier naturel non nul, $\sup_{x \in]1, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in]1, +\infty[} |R_n(x)| = 0$. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers sa somme sur $]1, +\infty[$.

Continuité sur $]1, +\infty[$. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$ est continue sur $]1, +\infty[$ et donc f est donc continue sur $]1, +\infty[$ en tant que limite uniforme sur $]1, +\infty[$ d'une suite de fonctions continues sur $]1, +\infty[$.

f est continue sur $]1, +\infty[$.

Limite en 1 à droite. Soit $n \geq 2$. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f_n(x)$ tend vers $\ell_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$.

Puisque la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 2$, converge uniformément vers sa somme sur $]1, +\infty[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général ℓ_n , $n \geq 2$ converge et que la fonction

$x \mapsto f(x) - \frac{1}{\ln(x)} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ tend vers le réel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures ou encore

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + O(1) \text{ et en particulier, } \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x > 1}} f(x) = +\infty.$$

3) La série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement vers la fonction f sur $]1, +\infty[$. De plus chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$,

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}.$$

Il reste à vérifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f'_n sur $]1, +\infty[$.

Soit $x > 1$. La série de terme général $f'_n(x)$ est alternée car son terme général est alterné en signe et sa valeur absolue à savoir $\frac{1}{x \ln^2(nx)}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ en décroissant. Donc, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x \ln^2(kx)} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{x \ln^2((n+1)x)} \right| = \frac{1}{x \ln^2((n+1)x)} \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)}.$$

Par suite, $\sup_{x \in]1, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in]1, +\infty[} |R_n(x)| = 0$. Ainsi, la série de fonctions de terme général f'_n , $n \geq 1$, converge uniformément sur $]1, +\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $]1, +\infty[$,
- chaque fonction f_n , $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $]1, +\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[\text{ et } \forall x > 1, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}.$$

Pour $x > 1$, puisque la série de somme $f'(x)$ est alternée, $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme à savoir $-\frac{1}{x \ln^2 x}$. Par suite, $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) \leq 0$ et f est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

n° 7 : 1) Convergence simple. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- Si $x = 0$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.
- Si $x > 0$, $n^2 f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3 \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas aussi, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

La série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence normale. La fonction f_0 est la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x ,

$$f'_n(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

La fonction f_n est positive sur $[0, +\infty[$, croissante sur $\left[0, \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement et donc

La série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. Pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. Soit donc n un entier supérieur ou égal à $\frac{4}{a^2}$. Pour tout réel t supérieur ou égal à a , on a $|f_n(t)| = f_n(t) \leq f_n(a)$ et donc $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(t)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et uniformément sur $[a, +\infty[$.

Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geq f_{n+1}(t),$$

et donc $\sup_{t \in [0, +\infty[} |R_n(t)| \geq \sup_{t \in [0, +\infty[} |f_{n+1}(t)| 4e^{-2}$. Par suite, $\sup_{t \in [0, +\infty[} |R_n(t)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

2) Convergence simple. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est définie sur $]0, +\infty[$. Soit $x \in]0, +\infty[$. Puisque $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 x^2} > 0$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge. Donc

la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Convergence normale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est décroissante et positive sur $]0, +\infty[$. Donc $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$. Puisque la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge

la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $5a, +\infty[$ et donc $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, converge normalement et uniformément sur $[a, +\infty[$.

3) Convergence simple. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- Si $x = 0$, pour tout entier naturel n , $f_n(x) = f_n(0) = 0$. Dans ce cas, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.
- Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{x}{(x^2 + 1)^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier $x > 0$ et de raison $\frac{1}{x^2 + 1} \in]0, 1[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{x}{(x^2 + 1)^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive décroissante de limite nulle. Par suite, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
- Si $x < 0$, puisque pour tout entier naturel n , $f_n(x) = -f_n(-x)$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

Finalement

la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Convergence normale. La fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ et donc la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Analysons la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $g_n = (-1)^n f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$g'_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} + x \times \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 - (2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La fonction g_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$. Puisque la fonction g_n est impaire, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}.$$

Mais $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(-(n+1) \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$ et donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2} \times \sqrt{n}} > 0.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et donc

la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, puisque la suite $\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive décroissante et de limite nulle, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x}{(1+x^2)^k} \right| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} \right| = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} = g_{n+1}(x) \leq g_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right),$$

cette inégalité restant valable pour $x < 0$ par parité. Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |R_n(x)| \leq g_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$. D'après ci-dessus, $g_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\sup_{x \in \mathbb{R}} |R_n(x)|$. On a montré que

la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

n° 8 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+ka} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{ka} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t^a)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a} dt,$$

avec $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a} dt \right| \leq \int_0^1 t^{(n+1)a} dt = \frac{1}{1+(n+1)a}$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{(n+1)a}}{1+t^a} dt = 0$. On en déduit que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{1+ka}$, $k \geq 0$, converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+ka} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} dt.$$

n° 9 : 1) **Convergence simple.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n , $1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \geq 1 > 0$ et donc $f_n(t)$ existe. Ensuite, $\ln \left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \right) > 0$ et donc la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alternée en signe. De plus, $|f_n(t)| = \ln \left(1 + \frac{t^2}{n(1+t^2)} \right)$ et la suite $(|f_n(t)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série de terme général $f_n(t)$, $n \geq 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

La série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout réel t on a

$$|R_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \right| \leq |f_{n+1}(t)| = \ln \left(1 + \frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)} \right) = \ln \left(1 + \frac{t^2+1-1}{(n+1)(1+t^2)} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(1+t^2)} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right),$$

et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(t)| \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = 0$, on a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |R_n(t)| = 0$ et on a montré que

La série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Continuité. Puisque chaque fonction f_n , $n \geq 1$, est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) D'après le théorème d'interversion des limites, f a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) \text{ (voir planche 6, n° 4, 5)}.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = \ln \left(\frac{2}{\pi} \right).$$

n° 10 : Domaine de définition. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t)$ existe et de plus $f_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n \geq 1$, converge absolument et en particulier converge. On a montré que

f est définie sur $\mathbb{R}$.

Parité. Pour tout réel t ,

$$f(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(-nt)}{n^2} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2} = -f(t).$$

f est impaire.

Convergence normale. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n , $|f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$ et donc pour tout entier naturel non nul n ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$, $n \geq 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Limite de f en $+\infty$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et que chaque fonction f_n a une limite réelle quand t tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que f a une limite réelle en $+\infty$ et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12} \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\frac{\pi^3}{12}.$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivation. Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n , $n \geq 1$, est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq a$,

$$f'_n(t) = \frac{n}{n^2(1+n^2t^2)} = \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\sup_{t \in [a, +\infty[} |f'_n(t)| = f'_n(a) = \frac{1}{n(1+n^2a^2)}$. Puisque $\frac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^3} > 0$, la série de terme général $\frac{1}{n(1+n^2a^2)}$ converge et par suite, la série de fonctions de terme général f'_n , $n \geq 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,

- la série de fonctions de terme général f_n , $n \geq 1$, converge simplement vers f sur $[a, +\infty[$,
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et puisque f est impaire

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^*, f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Dérivabilité en 0. La fonction f' est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction f' admet une limite en 0^+ élément de $] -\infty, +\infty]$. Pour $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a $f'(t) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+n^2t^2)}$ et quand t tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

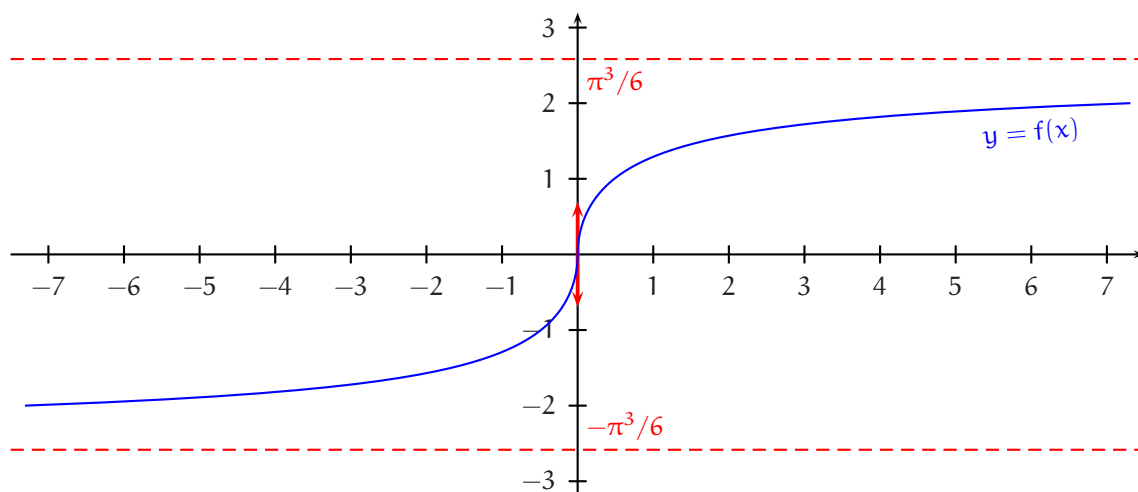
Cette inégalité étant vraie pour tout entier naturel non nul N , quand N tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

On a montré que $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f'(t) = +\infty$.

En résumé, f est de classe C^0 sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $f'(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. D'après un corollaire du théorème des accroissements finis, on sait que f n'est pas dérivable en 0 à droite et que sa courbe représentative admet $[Oy)$ pour demi-tangente en $(0, 0)$. Puisque f est impaire, f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet (Oy) pour tangente en $(0, 0)$.

Allure du graphe.



n° 11 : Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées.

On en déduit que $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc que la série de terme général $e^{-x\sqrt{n}}$ converge. Ainsi, f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{k}}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e^{-x\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k e^{-x\sqrt{t}} dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in]0, +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \quad (*).$$

Soit $x \in]0, +\infty[$. En posant $u = x\sqrt{t}$ et donc $t = \frac{u^2}{x^2}$ puis $dt = \frac{2u}{x^2} du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \frac{2}{x^2} \times \Gamma(2) = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement (*) s'écrit alors

$$\forall x \in]0, +\infty[, \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x^2} = +\infty$, on a montré que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x \rightarrow 0, x > 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

n° 12 : Soit $x \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|x^{n^2}| = |x|^{n^2} \leq |x|^n$. Puisque la série numérique de terme général $|x|^n$ converge, on en déduit que la série de terme général x^{n^2} est absolument convergente et en particulier convergente. Donc, f est bien définie sur $] -1, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$. La fonction $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} x^{t^2} dt \leq x^{k^2} \leq \int_{k-1}^k x^{t^2} dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in]0, 1[, \int_1^{+\infty} x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \quad (*).$$

Soit $x \in]0, 1[$. En posant $u = t\sqrt{-\ln x}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t\sqrt{-\ln x})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

L'encadrement (*) s'écrit alors

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} - \int_0^1 x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = +\infty$, on a montré que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \rightarrow 1, x < 1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$