

Planche n° 11. Intégrales dépendant d'un paramètre

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} dt$.

1) Calculer la dérivée de la fonction I_n sur $]0, +\infty[$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^3} dt$.

n° 2 (*) I (très long)** : (Intégrale de POISSON) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) d\theta$.

1) a) Montrer que F est paire, définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Préciser une expression de $F'(x)$ sous forme intégrale.

b) Calculer $F'(x)$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln x)$.

d) En déduire $F(x)$ pour tout réel x .

2) a) Quand $x \in]-1, 1[$, retrouver ce résultat en écrivant d'abord $\ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ comme somme d'une série (commencer par dériver la fonction de θ).

b) Déterminer une relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ et en déduire $F(x)$ pour tout réel x .

n° 3 (I)** : (Un calcul de l'intégrale de GAUSS $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

1) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F' .

2) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser G' .

3) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

5) En déduire I .

n° 4 (*)** : Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

n° 5 (*)** : Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

n° 6 (** I (très long))** : Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ (indication : trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par ces deux fonctions).

n° 7 (I)** : (Produit de convolution) 1) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, continues et T -périodiques (T réel strictement positif). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f * g(x) = \int_0^T f(x-t)g(t) dt.$$

Montrer que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue et T -périodique.

2) $*$ est donc une loi interne sur E , l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et T -périodiques. Montrer que cette loi est commutative et associative.