

# Planche n° 11. Intégrale dépendant d'un paramètre.

## Corrigé

**n° 1 :** 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $a$  et  $A$  deux réels tels que  $0 < a < A$ . On considère  $F_n : [a, A] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $(x, t) \mapsto \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}$ .

• Pour chaque  $x$  de  $[a, A]$ , la fonction  $t \mapsto F_n(x, t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$  car  $F_n(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}} > 0$  avec  $2n > 1$ .

• La fonction  $F_n$  est admet sur  $[a, A] \times [0, +\infty[$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  définie par :

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[, \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) = \frac{-2nx}{(t^2 + x^2)^{n+1}}.$$

De plus,

- pour chaque  $x \in [a, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ ,

- pour chaque  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $[a, A]$ ,

- pour chaque  $(x, t) \in [a, A] \times [0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial F_n}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2nx}{(t^2 + x^2)^{n+1}} \leq \frac{2nA}{(t^2 + a^2)^{n+1}} = \varphi(t),$$

où la fonction  $\varphi$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$  car négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $I_n$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, A]$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tous réels  $a$  et  $A$  tels que  $0 < a < A$ , on a montré que la fonction  $I_n$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall x > 0, I'_n(x) = -2nx \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^{n+1}} dt = -2nx I_{n+1}(x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I'_n(x) = -2nx I_{n+1}(x).$$

2) Pour  $x > 0$ , on a  $I_1(x) = \left[ \frac{1}{x} \operatorname{Arctan} \left( \frac{t}{x} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$ . Ensuite,  $I_2(x) = -\frac{1}{2x} I'_1(x) = \frac{\pi}{4x^3}$  puis  $I_3(x) = -\frac{1}{4x} I'_2(x) = \frac{3\pi}{16x^5}$  et donc  $I_3(1) = \frac{3\pi}{16}$ .

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^3} dt = \frac{3\pi}{16}.$$

**n° 2 :** 1) a) **Parité de F.** Soit  $x$  un réel du domaine de définition de  $F$ . En posant  $t = \theta + \pi$ , on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 + 2x \cos t + 1) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x \cos t + 1) dt \text{ (par } 2\pi\text{-périodicité)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln((-x)^2 - 2(-x) \cos t + 1) dt = F(-x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $F(x)$  existe si et seulement si  $F(-x)$  existe et de plus  $F(x) = F(-x)$ .

F est paire.

**Définition de F.** Soit  $x \in [0, +\infty[$ . Pour tout réel  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = |x - e^{i\theta}|^2 \geq 0.$$

De plus,  $|x - e^{i\theta}| = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = x \Leftrightarrow x = 1$  et  $\theta = 0$ . Par suite,

- si  $x \neq 1$ , la fonction  $\theta \mapsto x^2 - 2x \cos \theta + 1$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  et donc intégrable sur ce segment.
- si  $x = 1$ , pour tout réel  $\theta \in [-\pi, \pi]$  on a  $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ . La fonction  $\theta \mapsto \ln \left( 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$  est continue sur  $[-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$  et quand  $\theta$  tend vers 0

$$\ln \left( 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2 \ln 2 + 2 \ln \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \sim 2 \ln \left| \frac{\theta}{2} \right| \sim 2 \ln |\theta| = o \left( \frac{1}{\sqrt{|\theta|}} \right).$$

On en déduit que la fonction  $\theta \mapsto \ln \left( 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$  est intégrable sur  $[-\pi, \pi]$  et donc que  $F(1)$  existe.

Finalement,  $F$  est définie sur  $[0, +\infty[$  et par parité

F est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Remarque. Par parité de la fonction  $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ , pour tout réel  $x$ , on a encore  $F(x) = 2 \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$ .

**Continuité de F.** Soit  $A > 1$ . Soit  $\Phi : [0, A] \times ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, \theta) \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ .

- Pour chaque  $x \in [0, A]$ , la fonction  $\theta \mapsto \Phi(x, \theta)$  est continue par morceaux sur  $]0, \pi[$ .
- Pour chaque  $\theta \in ]0, \pi[$ , la fonction  $x \mapsto \Phi(x, \theta)$  est continue par morceaux sur  $[0, A]$ .
- Pour chaque  $(x, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[$ , puisque  $x^2 - 2x \cos \theta + 1 = (x - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2$ ,

$$|\Phi(x, \theta)| \leq \max\{|\ln(0^2 - 0 \cos \theta + 1)|, |\ln(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \theta + 1)|, |\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)|\} \\ = \max\{2|\ln(|\sin \theta|)|, |\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)|\} = \varphi(\theta).$$

On a vu que la fonction  $f_1 : \theta \mapsto 2|\ln(|\sin \theta|)|$  est intégrable sur  $]0, \pi[$  et d'autre part, la fonction  $f_2 : \theta \mapsto |\ln(A^2 - 2A \cos \theta + 1)|$  est intégrable sur  $[0, \pi]$  et donc sur  $]0, \pi[$  car continue sur  $[0, \pi]$ . Puisque  $\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|)$ , on en déduit que la fonction  $\varphi$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, \pi[$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $F$  est continue sur  $[0, A]$  et ceci pour tout  $A > 1$ . Par suite, la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  puis par parité,

la fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Dérivabilité de F.** Soient  $A \in ]0, 1[$  puis  $\Phi : [-A, A] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, \theta) \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ .

- Pour chaque  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $\theta \mapsto \Phi(x, \theta)$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  et donc intégrable sur ce segment.
- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[-A, A] \times [0, \pi]$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  définie par

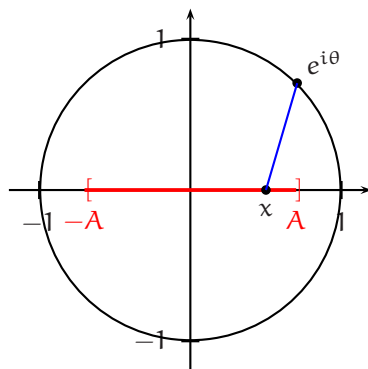
$$\forall (x, \theta) \in [-A, A] \times [0, \pi], \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta) = \frac{2x - 2 \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}.$$

De plus,

- pour chaque  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $\theta \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta)$  est continue par morceaux sur  $[0, \pi]$ ,
- pour chaque  $\theta \in [0, \pi]$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta)$  est continue sur  $[-A, A]$ ,
- pour chaque  $(x, \theta) \in [-A, A] \times [0, \pi]$ ,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \theta) \right| = \frac{2|x - \cos \theta|}{|x - e^{i\theta}|^2} \leq \frac{4}{|A - 1|^2} = \varphi(\theta).$$

La dernière inégalité écrite est claire géométriquement :



La plus courte distance d'un point du segment  $[-A, A]$  au cercle trigonométrique est la distance de  $A$  à 1.

De plus, la fonction constante  $\varphi$  est intégrable sur le segment  $[0, \pi]$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-A, A]$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout  $A \in ]0, 1[$ ,  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, 1[$  et  $\forall x \in ] -1, 1[$ ,

$F'(x) = 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta$ . La démarche est analogue sur  $] -\infty, -1[$  et sur  $]1, +\infty[$  et finalement  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, F'(x) = 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta.$$

**b) Calcul de  $F'(x)$ .** Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . On pose  $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . On a donc  $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$ . On obtient

$$\begin{aligned} F'(x) &= 4 \int_0^\pi \frac{x - \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} d\theta = 8 \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{x^2 - 2x \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 8 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)x - (1-t^2)}{((1+t^2)x^2 - 2x(1-t^2) + (1+t^2))(1+t^2)} dt \\ &= 8 \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)} dt \end{aligned}$$

Pour tout réel  $t$ ,

$$\left(t^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)(t^2+1) = \left(t - i\frac{x-1}{x+1}\right)\left(t + i\frac{x-1}{x+1}\right)(t-i)(t+i).$$

De plus,  $\pm \frac{x-1}{x+1} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = -1 \Leftrightarrow x = 0$ .

- $F'(0) = 4 \int_0^\pi (-\cos \theta) d\theta = 0$ .

- Si  $x \neq 0$ , les pôles de la fraction rationnelle  $\frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)}$  sont simples et par parité, la décomposition en éléments simples de cette fraction s'écrit

$$\frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)} = \frac{a}{t - i\frac{x-1}{x+1}} - \frac{a}{t + i\frac{x-1}{x+1}} + \frac{b}{t-i} - \frac{b}{t+i},$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{-(x+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + (x-1)}{(x+1)^2 \left(2i\frac{x-1}{x+1}\right) \left(1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)} = \frac{-(x+1)(x-1)^2 + (x-1)(x+1)^2}{2i(x+1)(x-1)((x+1)^2 - (x-1)^2)} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{2i(x^2-1)(4x)} = \frac{1}{4ix}, \end{aligned}$$

et

$$b = \frac{-(x+1) + (x-1)}{2i(-(x+1)^2 + (x-1)^2)} = \frac{1}{4ix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 8 \frac{(x+1)t^2 + (x-1)}{((x+1)^2 t^2 + (x-1)^2)(1+t^2)} &= \frac{2}{ix} \left( \frac{1}{t - i \frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{t + i \frac{x-1}{x+1}} + \frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right) \\ &= \frac{2}{ix} \left( \frac{2i \frac{x-1}{x+1}}{t^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} + \frac{2i}{t^2 + 1} \right) = \frac{4}{x} \left( \frac{x^2 - 1}{(x+1)^2 t^2 + (x-1)^2} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Ensuite, en notant  $\varepsilon$  le signe de  $\frac{x-1}{x+1}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{4}{x} \int_0^{+\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{(x+1)^2 t^2 + (x-1)^2} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= \frac{4}{x} \left[ \frac{x^2 - 1}{(x+1)^2} \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{Arctan} \left( \frac{t}{\frac{x-1}{x+1}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{4}{x} (\varepsilon + 1) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Par suite, si  $x \in ]-1, 1[$ ,  $F'(x) = 0$  et si  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ ,  $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ \frac{4\pi}{x} & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \end{cases}.$$

c) Soit  $x > 1$ .

$$F(x) - 4\pi \ln(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left( 1 - \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2} \right) d\theta = F \left( \frac{1}{x} \right).$$

Par suite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F \left( \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = F(0) = 0$  par continuité de  $F$  en 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln(x)) = 0.$$

d) •  $F$  est continue sur  $[-1, 1]$ , dérivable sur  $] -1, 1[$  de dérivée nulle sur  $] -1, 1[$ . Donc la fonction  $F$  est constante sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Par suite, pour tout réel  $x \in [-1, 1]$ ,  $F(x) = F(0) = 0$ .

- $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $\forall x > 1$ ,  $F'(x) = \frac{4\pi}{x}$ . Donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x > 1$ ,  $F(x) = 4\pi \ln x + C$  avec  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - 4\pi \ln x) = 0$ . Donc  $\forall x > 1$ ,  $F(x) = 4\pi \ln x$ .
- Si  $x < -1$ ,  $F(x) = F(-x) = 4\pi \ln(-x) = 4\pi \ln|x|$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 4\pi \ln(|x|) & \text{si } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \end{cases}.$$

2) a) Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , on pose  $f(\theta) = \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1)$ . Puisque  $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $x^2 - 2x \cos \theta + 1 > 0$  (voir 1)),  $f$  est dérivable sur  $[-\pi, \pi]$  et pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{2x \sin \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} = \frac{1}{i} \left( \frac{e^{i\theta}}{x - e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{x - e^{-i\theta}} \right) = \frac{1}{i} \left( -\frac{1}{1 - x e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - x e^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{i} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-in\theta} \right) \quad (\text{car } |x e^{i\theta}| = |x e^{-i\theta}| = |x| < 1) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n. \end{aligned}$$

Soit  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . I désigne l'intervalle  $[0, \theta]$  ou  $[\theta, 0]$  suivant que  $\theta$  soit positif ou négatif.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in I$ , posons  $g_n(t) = 2 \sin(nt)x^n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in I$ , on a  $|f_n(t)| \leq |x|^n$ . Comme  $|x|^n$  est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , converge normalement et donc uniformément sur le segment I. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(0) + \int_0^\theta f'(t) dt = 2 \ln(1-x) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n \int_0^\theta \sin(nt) dt \\ &= 2 \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos(n\theta)) \frac{x^n}{n} \right) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n. \end{aligned}$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \forall \theta \in [-\pi, \pi], \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n.$$

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $\left| \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n \right| \leq |x|^n$ . Comme précédemment, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$F(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = 0.$$

$$\forall x \in ]-1, 1[, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta = 0.$$

b) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ .

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{x^2}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (\ln(1 - 2x \cos \theta + x^2) - \ln(x^2)) d\theta = -4\pi \ln|x| + F(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F\left(\frac{1}{x}\right) = -4\pi \ln|x| + F(x).$$

Soit  $x > 1$ . Puisque  $\frac{1}{x} \in ]0, 1[$ ,  $F(x) = 4\pi \ln x + F\left(\frac{1}{x}\right) = 4\pi \ln x$ . On retrouve alors les résultats du 1).

**n° 3 :** 1) Soit  $A > 0$ . Soit  $\Phi : [-A, A] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$

- Pour chaque  $x$  de  $[-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto F(x, t)$  est continue sur le segment  $[0, 1]$  et donc intégrable sur ce segment.
- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[-A, A] \times [0, 1]$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable  $x$  définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, 1], \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

De plus,

- pour chaque  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur le segment  $[0, 1]$ ,
- pour chaque  $t \in [0, 1]$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ ,
- pour chaque  $(x, t) \in [-A, A] \times [0, 1]$ ,  $\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2A = \varphi(t)$ , la fonction  $\varphi$  étant continue et donc intégrable sur le segment  $[0, 1]$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $[-A, A]$  et sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout  $A > 0$ ,  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

2) La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la fonction  $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Il en est de même de la fonction  $G$  et pour tout réel  $x$ ,

$$G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

3) Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . En posant  $u = xt$ , on obtient

$$F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} x dt = -e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -G'(x),$$

cette égalité restant vraie quand  $x = 0$  par continuité des fonctions  $F'$  et  $G'$  sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi,  $F' + G' = 0$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + G(x) = \frac{\pi}{4}.$$

4) Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|F(x)| = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4e^{x^2}},$$

et puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4e^{x^2}} = 0$ , on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

5) Pour  $x > 0$ , on a  $\int_0^x e^{-t^2} dt \geq 0$  et donc d'après la question 3),

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{G(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - F(x)}.$$

La question 4) permet alors d'affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et donc que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**n° 4 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) = \frac{1}{2}(e^{-t^2+tx} + e^{-t^2-tx}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  d'après un théorème de croissances comparées et donc la fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on peut poser  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt$ .

**Calcul de  $f(x)$ .** Soit  $A > 0$ . On pose  $\Phi : [-A, A] \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(x, t) \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$

- Pour chaque  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[-A, A] \times [0, +\infty[$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx).$$

De plus,

- pour chaque  $x \in [-A, A]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ ,
- pour chaque  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $[-A, A]$ ,
- pour chaque  $(x, t) \in [-A, A] \times [0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = te^{-t^2} |\operatorname{sh}(tx)| \leq te^{-t^2} \operatorname{sh}(t|A|) = \varphi(t).$$

La fonction  $\varphi$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  et intégrable sur  $[0, +\infty[$  car négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[-A, A]$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel  $A > 0$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On effectue maintenant une intégration par parties. Soit  $A > 0$ . Les deux fonctions  $t \mapsto te^{-t^2}$  et  $t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt = \left[ -\frac{1}{2}e^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) \right]_0^A + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = -\frac{1}{2}e^{-A^2} \operatorname{sh}(tA) + \frac{x}{2} \int_0^A e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt.$$

Quand  $A$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $f'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{sh}(tx) dt = \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = \frac{x}{2} f(x)$ .

Ensuite, pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x^2/4} f'(x) - \frac{x}{2} e^{-x^2/4} f(x) = 0$  ou encore  $(e^{-x^2/4} f)'(x) = 0$ . On en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x^2/4} f(x) = e^0 f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et donc que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(tx) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2/4}.$$

**n° 5 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$  est continue sur  $]0, 1[$ .

**Etude en 1.**  $\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t \rightarrow 1}{\sim} 1 \times 1 = 1$  et donc la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$  se prolonge par continuité en 1. On en déduit que la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$  est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche.

**Etude en 0.**  $\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t} > 0$ .

-si  $x > -1$ ,  $-\frac{t^x}{\ln t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} o(t^x)$  et puisque  $x > -1$ , la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$  est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

- si  $x \leq -1$ , la fonction  $t \mapsto -\frac{t^x}{\ln t}$  domine la fonction  $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$  quand  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures. Puisque la fonction  $-\frac{1}{t \ln t}$  est positive et que  $\int_x^{1/2} -\frac{1}{t \ln t} dt = \ln |\ln(x)| - \ln |\ln(1/2)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ , la fonction  $t \mapsto -\frac{1}{t \ln t}$  n'est pas intégrable sur un voisinage de 0. Il en est de même de la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$ .

Finalement, la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$  est intégrable sur  $]0, 1[$  si et seulement si  $x > -1$ . Pour  $x > -1$ , on peut poser  $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ .

**Calcul de  $f(x)$ .** Soit  $a > -1$ . On pose  $\Phi : [a, +\infty[ \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(x, t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$$

- Pour chaque  $x \in [a, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t} t^x$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, 1[$ .
- La fonction  $\Phi$  admet sur  $[a, +\infty[ \times ]0, 1[$  une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par :

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times ]0, 1[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x.$$

De plus,

- pour chaque  $x \in [a, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$ ,
- pour chaque  $t \in ]0, 1[$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $[a, +\infty[$ ,
- pour chaque  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times ]0, 1[$ ,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = (1-t)t^a = \varphi(t).$$

La fonction  $\varphi$  est continue par morceaux sur  $]0, 1[$  et intégrable sur  $]0, 1[$  car  $a > -1$ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$  et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel  $a > -1$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\forall x > -1, f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x dt = \left[ \frac{t^{x+2}}{x+2} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Par suite, il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x > -1, f(x) = \ln \left( \frac{x+2}{x+1} \right) + C$  (\*). Pour déterminer la constante  $C$ , on peut utiliser

le résultat de l'exercice n° 7, planche 7 :  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$ . On peut aussi obtenir directement la constante  $C$  sans aucun calcul d'intégrale. Pour cela, déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

La fonction  $g : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$  est continue sur le segment  $]0, 1[$ , prolongeable par continuité en 0 et en 1 en posant  $g(0) = 0$  et  $g(1) = 1$ . On en déduit que cette fonction est bornée sur l'intervalle  $]0, 1[$  (car son prolongement est une fonction continue sur un segment).

Soit  $M$  un majorant de la fonction  $|g|$  sur  $]0, 1[$ . Pour  $x > -1$ , on a

$$|g(x)| \leq M \int_0^1 t^x dt = \frac{M}{x+1}.$$

Ceci montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et en passant à la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  dans l'égalité (\*), on obtient  $C = 0$ . On a donc montré que

$$\forall x > -1, \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt = \ln \left( \frac{x+2}{x+1} \right).$$

On retrouve en particulier  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$ .

**n° 6 : Existence de**  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ . Soit  $x \geq 0$ . La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et est dominée par  $\frac{1}{t^2}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Cette fonction est donc intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$  existe pour tout réel positif  $x$  et on pose  $\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$ .

**Continuité de  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .** Soit  $\Phi : [0, +\infty[ \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

- Pour chaque  $x \in [0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto \Phi(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour chaque  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \Phi(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour chaque  $(x, t) \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ ,

$$|\Phi(x, t)| = \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi_0(t).$$

De plus, la fonction  $\varphi_0$  est continue et intégrable sur  $[0, +\infty[$  car équivalente à  $\frac{1}{t^2}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Dérivée seconde de  $f$ .** Soit  $a > 0$ . On pose  $\Phi : [0, +\infty[ \times [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

En plus de ce qui précède,  $\Phi$  admet sur  $[a, +\infty[ \times [0, +\infty[$  des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 définies par

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times [0, +\infty[, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}.$$

- Pour chaque  $x \in [a, +\infty[$ , les fonctions  $t \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$  sont continues par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .
- Pour chaque  $t \in [0, +\infty[$ , les fonctions  $x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$  et  $x \mapsto \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t)$  sont continues sur  $[a, +\infty[$ .
- Pour chaque  $(x, t) \in [a, +\infty[ \times [0, +\infty[$ ,

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{te^{-tx}}{1+t^2} \leq \frac{te^{-at}}{1+t^2} = \varphi_1(t) \text{ et } \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} = \varphi_2(t).$$

De plus, les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont continues par morceaux et intégrables sur  $[0, +\infty[$  car négligeables devant  $\frac{1}{t^2}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètres,  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, +\infty[$  et ses dérivées premières et secondes s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout  $a > 0$ ,  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et

$$\forall x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2} dt \text{ et } f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt.$$

**Equation différentielle vérifiée par  $f$ .** Pour  $x > 0$ ,

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[ -\frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0, f(x) + f''(x) = \frac{1}{x}.$$

**Existence de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ .** Si  $x = 0$ , le n° 3, 1) de la planche 7 montre que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est une intégrale convergente. Si  $x > 0$ , une intégration par parties fournit pour  $A > 0$

$$\int_0^A \frac{\sin t}{t+x} dt = -\frac{\cos A}{A+x} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{\cos t}{(t+x)^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et est dominée par  $\frac{1}{t^2}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Cette fonction est donc intégrable sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit que la fonction  $A \mapsto \int_0^A \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt$  a une limite réelle quand  $A$  tend vers  $+\infty$  et il en est de même de la fonction  $A \mapsto \int_0^A \frac{\sin t}{t+x} dt$ . Ainsi, pour chaque  $x \in [0, +\infty[$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$  est une intégrale convergente. Pour  $x \geq 0$ , on peut donc poser  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ .

**Equation différentielle vérifiée par  $g$ .** Pour  $x > 0$ , on pose  $u = x + t$ . on obtient

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

(car toutes les intégrales considérées sont convergentes). Maintenant, les fonctions  $c : u \mapsto \frac{\cos u}{u}$  et  $s : u \mapsto \frac{\sin u}{u}$  sont continues sur  $]0, +\infty[$  et admettent donc des primitives sur  $]0, +\infty[$ . On note  $C$  (respectivement  $S$ ) une primitive de la fonction  $c$  (respectivement  $s$ ) sur  $]0, +\infty[$ . Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) - C(x)$ . On en déduit que la fonction  $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée  $-c$ . De même, la fonction  $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée  $-s$ . Mais alors la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\sin x \cos x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos x \sin x}{x} \\ &= -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du. \end{aligned}$$

La fonction  $g'$  est encore de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et pour tout réel  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \frac{\cos^2 x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= \frac{1}{x} - g(x).$$

$$\forall x > 0, g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}.$$

**Egalité de f et g sur  $]0, +\infty[$ .** Pour tout réel  $x > 0$ ,  $(f - g)''(x) + (f - g)(x) = 0$ . Donc il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\forall x > 0$ ,  $(f - g)(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x = A \cos(x + \varphi)$  pour  $A = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$  et pour un certain  $\varphi$ .

Maintenant, pour  $x > 0$ ,  $|f(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$  et on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Ensuite,  $|g(x)| \leq \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| + \left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right|$ . Puisque les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$  sont des intégrales convergentes, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = 0$  et donc aussi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$  ce qui impose  $A = 0$  et donc  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = g(x)$ .

$$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

**Continuité de g en 0 et valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .** Pour  $x > 0$ ,

$$g(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$$

$$= \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du + \sin x \int_x^1 \frac{1 - \cos u}{u} du - \sin x \ln x.$$

Quand  $x$  tend vers 0,  $\sin x \ln x \sim x \ln x$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln x = 0$ . Ensuite, la fonction  $u \mapsto \frac{1 - \cos u}{u}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  car continue sur  $]0, 1]$  et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \int_x^1 \frac{1 - \cos u}{u} du = 0 \times \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u} du = 0$ . Il reste

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = g(0).$$

La fonction  $g$  est donc continue en 0. Puisque la fonction  $f$  est également continue en 0, on en déduit que

$$g(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall x \geq 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt \text{ et en particulier, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

**n° 7 :** • Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto f(x-t)g(t)$  est continue sur le segment  $[0, T]$  et donc intégrable sur ce segment. Par suite,  $f * g(x)$  existe.

• Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $f * g(x+T) = \int_0^T f(x+T-t)g(t) dt = \int_0^T f(x-t)g(t) dt = f * g(x)$ . Donc la fonction  $f * g$  est  $T$ -périodique.

• Les fonction  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et  $T$ -périodiques. Ces fonctions sont en particulier bornées sur  $\mathbb{R}$ . On note  $M_1$  et  $M_2$  des majorants sur  $\mathbb{R}$  des fonctions  $|f|$  et  $|g|$  respectivement.

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$$

- Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \Phi(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, T]$ .

- Pour chaque  $t \in [0, T]$ , la fonction  $x \mapsto \Phi(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour chaque  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ ,  $|\Phi(x, t)| \leq M_1 M_2 = \varphi(t)$ . De plus, la fonction  $\varphi$  est continue et donc intégrable sur le segment  $[0, T]$ .

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $f * g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**2)** Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $E$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . En posant  $u = x - t$ , on obtient

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_0^T f(x - t)g(t) \, dt = \int_x^{x-T} f(u)g(u - t) (-du) = \int_{x-T}^x g(u - t)f(u) \, du \\ &= \int_0^T g(u - t)f(u) \, du \text{ (car la fonction } u \mapsto g(u - t)f(u) \text{ est } T\text{-périodique)} \\ &= g * f(x). \end{aligned}$$