

# Planche n° 13. Séries de FOURIER

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\*)** : 1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire telle que  $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ . Déterminer  $f(x)$  pour tout réel  $x$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et paire telle que  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ . Déterminer  $f(x)$  pour tout réel  $x$ .

**n° 2 :** Développer en série de FOURIER les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

1) (\*\*)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique paire telle que  $\forall x \in [0, \pi]$ ,  $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

2) (\*\*)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique impaire telle que  $\forall x \in [0, \pi]$ ,  $f(x) = x(\pi - x)$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ .

3) (\*\*)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique telle que  $\forall x \in ]-\pi, \pi]$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$ .

4) (\*\*\*)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique telle que  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$  ( $\lambda$  réel strictement positif donné). En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2 + n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 + n^2}$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + n^2)^2}$ .

5) (\*\*)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sup(0, \sin x)$ . En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ .

**n° 3 (\*\*\*)** : Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

1) a) Développer en série trigonométrique la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$  (utiliser la racine de plus petit module, notée  $b$ , de l'équation  $z^2 - az + 1 = 0$ ).

b) La série obtenue est-elle la série de FOURIER de  $f$  ?

2) Déduire de 1) la valeur des intégrales  $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**n° 4 (\*\*\*) I :** (un développement en série de fonctions de  $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$  et  $\cotan(\pi z)$ ).

Soit  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodique telles que  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f(x) = \cos(\alpha x)$ .

1) Développer la fonction  $f$  en série de FOURIER.

2) En déduire que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

**n° 5 (\*\*)** : Développer en série de FOURIER la fonction  $f : x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$ .