

Planche n° 15. Formes quadratiques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Rang et signature des formes quadratiques suivantes :

1) $Q((x, y, z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz.$

2) $Q((x, y, z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

3) $Q((x, y, z, t)) = xy + yz + zt + tx.$

4) $Q((x, y, z, t)) = x^2 + (4 + \lambda)y^2 + (1 + 4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1 - \lambda)yz + 2\lambda yt + (1 - 4\lambda)zt.$

5) $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$

6) $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij x_i x_j.$

7) $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n}^i x_i x_j.$

8) $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Inf}(i, j) x_i x_j.$

n° 2 ()** : Soit $E = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), Q(f) = \lambda \text{Tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1) Vérifier que Q est une forme quadratique sur E .

2) Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de Q . Analyser en particulier les cas $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et $(\lambda, \mu) = (0, 1)$.

n° 3 ()** : Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On note φ sa forme polaire. On suppose que φ est non dégénérée mais non définie. Montrer que Q n'est pas de signe constant.

n° 4 (*) I** : Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ n fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt$ puis pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{i,j} x_i x_j.$

1) Montrer que Q est une forme quadratique positive.

2) Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

3) Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in [a, b], f_i(t) = t^{i-1}.$

n° 5 (*)** : Soit S une matrice symétrique réelle, définie positive. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Q((x_1, \dots, x_n)) = -\det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est une forme quadratique définie positive.

n° 6 ()** : Sur $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :

1) $Q((x, y)) = x^2 + 10xy + y^2.$

2) $Q((x, y)) = 6x^2 + 4xy + 9y^2.$

3) $Q((x, y, z)) = 4x^2 + 9y^2 - z^2 + 2\sqrt{6}xy + 10\sqrt{2}xz + 2\sqrt{3}yz.$

n° 7 (*)** : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$, on pose $Q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}.$

1) Montrer que Q est une forme quadratique sur E .

2) Déterminer sa signature.

n° 8 (I) :** Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A = {}^t T T$.

n° 9 (*) I) :** Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux (utiliser le n° 8).