

# Planche n° 15. Formes quadratiques. Corrigé

**n° 1 : 1) 1ère solution.** La matrice de la forme quadratique  $Q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 2-X & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-X & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6-X \end{vmatrix} = (2-X) \left( X^2 + 8X - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{2} \left( -\frac{3}{2}X - 2 \right) - 2 \left( -2X + \frac{5}{4} \right) \\ &= -X^3 - 6X^2 + \frac{45}{2}X = -X \left( X^2 + 6X - \frac{45}{2} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $A$  est symétrique réelle, on sait que les valeurs propres de  $A$  sont réelles.  $\chi_A$  admet pour racines 0 et deux réels non nuls de signes contraires (puisque leur produit vaut  $-\frac{45}{2}$ ). Par suite, le rang et la signature de  $Q$  sont

$$r = 2 \text{ et } s = (1, 1).$$

**2ème solution.** On effectue une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x, y, z)) &= 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz = 2x^2 + x(3y - 4z) - 2y^2 + 7yz - 6z^2 \\ &= 2 \left( x + \frac{3}{4}y - z \right)^2 - 2 \left( \frac{3}{4}y - z \right)^2 - 2y^2 + 7yz - 6z^2 = 2 \left( x + \frac{3}{4}y - z \right)^2 - \frac{25}{8}y^2 + 10yz - 8z^2 \\ &= 2 \left( x + \frac{3}{4}y - z \right)^2 - \frac{25}{8} \left( y - \frac{8}{5}z \right)^2. \end{aligned}$$

Les formes linéaires  $(x, y, z) \mapsto x + \frac{3}{4}y - z$  et  $(x, y, z) \mapsto y - \frac{8}{5}z$  étant linéairement indépendantes, on retrouve le fait que  $Q$  est de rang  $r = 2$  et de signature  $s = (1, 1)$ . La forme quadratique  $Q$  est dégénérée et n'est ni positive ni négative.

**2)** La matrice de  $Q$  dans la base canonique  $(i, j, k)$  est  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Le nombre 4 est valeur propre de  $A$  et

puisque  $A$  est diagonalisable, 4 est valeur propre d'ordre  $\dim(\text{Ker}(A - 4I_3)) = 3 - \text{rg}(A - 4I_3) = 2$ . La dernière valeur propre  $\lambda$  est fournie par  $4 + 4 + \lambda = \text{Tr}(A) = 9$  et  $\lambda = 1$ . Ainsi,  $\text{Sp}(A) = (1, 4, 4)$ .

Les trois valeurs propres de  $A$  sont strictement positives et donc la forme quadratique  $Q$  est de rang 3 et de signature  $(3, 0)$ .

$$Q \text{ est définie positive.}$$

**3)** Effectuons une réduction de GAUSS.

$$Q((x, y, z, t)) = xy + yz + zt + tx = (x + z)(y + t) = \frac{1}{4}(x + y + z + t)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z - t)^2.$$

Puisque les deux formes linéaires  $(x, y, z, t) \mapsto x + y + z + t$  et  $(x, y, z, t) \mapsto x - y + z - t$  sont linéairement indépendantes, la forme quadratique  $Q$  est de rang  $r = 2$  et de signature  $s = (1, 1)$ .

**4)** Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x, y, z, t)) &= x^2 + (4 + \lambda)y^2 + (1 + 4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1 - \lambda)yz + 2\lambda yt + (1 - 4\lambda)zt \\ &= (x + 2y + z)^2 + \lambda y^2 + 4\lambda z^2 + \lambda t^2 - 4\lambda yz + 2\lambda yt + (1 - 4\lambda)zt \\ &= (x + 2y + z)^2 + \lambda(y - 2z + t)^2 + zt = (x + 2y + z)^2 + \lambda(y - 2z + t)^2 + \frac{1}{4}(z + t)^2 - \frac{1}{4}(z - t)^2. \end{aligned}$$

Si  $\lambda < 0$ , la forme quadratique  $Q$  est de rang 4 et de signature  $(2, 2)$ .

Si  $\lambda = 0$ , la forme quadratique  $Q$  est de rang 3 et de signature  $(2, 1)$ .

Si  $\lambda > 0$ , la forme quadratique  $Q$  est de rang 4 et de signature  $(3, 1)$ .

**5) 1ère solution.** La matrice de la forme quadratique  $Q$  dans la base canonique est  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Les

valeurs propres de  $A$  sont  $-\frac{1}{2}$  qui est d'ordre 4 et 2 qui est valeur propre simple. Donc, la signature de la forme quadratique  $Q$  est

$$s = (1, 4).$$

**2ème solution.** Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x_1, \dots, x_5)) &= x_1x_2 + x_1(x_3 + x_4 + x_5) + x_2(x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\ &= (x_1 + x_3 + x_4 + x_5)(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_3 + x_4 + x_5)^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_4x_5 - \frac{3}{4}x_5^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_4 - \frac{1}{3}x_5\right)^2 - \frac{5}{6}x_5^2, \end{aligned}$$

et on retrouve  $s = (1, 4)$ .

**6)**  $Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)^2$  et donc

$$r = 1 \text{ et } s = (1, 0).$$

**7)** Pour  $n \geq 2$ ,  $Q((x_1, \dots, x_n)) = \left(\sum_{i=1}^n ix_i\right) \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n (i+1)x_i\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n (i-1)x_i\right)^2$ . Donc

$$r = 2 \text{ et } s = (1, 1)$$

car les deux formes linéaires  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i+1)x_i$  et  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i-1)x_i$  sont indépendantes pour  $n \geq 2$ .

**8)** Puisque la matrice de  $Q$  dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q((x_1, \dots, x_n)) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} x_i x_j + \dots + \sum_{n-1 \leq i, j \leq n} x_i x_j + x_n^2 \\ &= (x_1 + \dots + x_n)^2 + (x_2 + \dots + x_n)^2 + \dots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2. \end{aligned}$$

$Q$  est donc définie positive.

**n° 2 :** 1) Si la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ,

$$Q(f) = \lambda(a^2 + 2bc + d^2) + \mu(ad - bc).$$

Q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de f dans la base canonique de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  et donc Q est une forme quadratique sur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .

2) • Si  $\lambda = \mu = 0$ ,  $r = 0$  et  $s = (0, 0)$ . Si  $\lambda = 0$  et  $\mu \neq 0$ ,

$$Q(f) = \frac{\mu}{4}(a+d)^2 - \frac{\mu}{4}(a-d)^2 - \frac{\mu}{4}(b+c)^2 + \frac{\mu}{4}(b-c)^2,$$

et donc  $r = 4$  et  $s = (2, 2)$ .

• Si  $\lambda \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} Q(f) &= \lambda a^2 + \mu ad + (2\lambda - \mu)bc + \lambda d^2 = \lambda \left(a + \frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2 + (2\lambda - \mu)bc + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2 \\ &= \lambda \left(a + \frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2 + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2 + \frac{2\lambda - \mu}{4}(b+c)^2 - \frac{2\lambda - \mu}{4}(b-c)^2. \end{aligned}$$

Maintenant, les quatre formes linéaires  $(a, b, c, d) \mapsto a + \frac{\mu}{2\lambda}d$ ,  $(a, b, c, d) \mapsto d$ ,  $(a, b, c, d) \mapsto b + c$  et  $(a, b, c, d) \mapsto b - c$  sont linéairement indépendantes. Donc

- si  $\mu = 2\lambda (\neq 0)$ ,  $r = 1$ ,
- si  $\mu = -2\lambda (\neq 2\lambda)$ ,  $r = 3$ ,
- si  $|\mu| \neq 2|\lambda| (\neq 0)$ ,  $r = 4$ .

En particulier, si  $\lambda = 1$  et  $\mu = 0$ , alors  $r = 4$  et  $s = (3, 1)$  et si  $\lambda = 0$  et  $\mu = 1$ ,  $r = 4$  et  $s = (2, 2)$ .

**n° 3 :** Dans le cas où E est de dimension finie, la signature de Q permet de conclure immédiatement. Supposons donc que E n'est pas de dimension finie.

Par hypothèse, il existe un vecteur non nul  $x_0$  tel que  $Q(x_0) = 0$ . Supposons Q de signe constant. Ouite à remplacer Q par  $-Q$ , on supposera que Q est positive. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (valable pour les formes quadratiques positives)

$$\forall y \in E, |\varphi(x_0, y)| \leq \sqrt{Q(x_0)}\sqrt{Q(y)} = 0.$$

Donc  $\forall y \in E$ ,  $\varphi(x_0, y) = 0$  et  $x_0$  est dans le noyau de  $\varphi$ . Puisque  $x_0 \neq 0$ , on en déduit que  $\varphi$  est dégénérée. En résumé, si Q est de signe constant,  $\varphi$  est dégénérée ou encore si  $\varphi$  est non dégénérée, Q n'est pas de signe constant.

**n° 4 :** 1) Pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt \right) x_i x_j = \int_a^b \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j f_i(t) f_j(t) \right) dt = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right)^2 dt \geq 0.$$

Donc Q est une forme quadratique positive.

2) De plus, pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q((x_1, \dots, x_n)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$  (fonction continue positive d'intégrale nulle).  
Donc

$$\begin{aligned} Q \text{ définie} &\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, [Q((x_1, \dots, x_n)) = 0 \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = 0] \\ &\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \left[ \sum_{i=1}^n x_i f_i = 0 \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = 0 \right] \\ &\quad (f_1, \dots, f_n) \text{ libre.} \end{aligned}$$

3) Dans le cas particulier envisagé, la matrice de Q dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est la matrice de HILBERT  $H_n = \left( \frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**n° 5 :** Posons  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}.$

Un calcul par blocs fournit  $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}$  puis

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXS^{-1}X & {}^tXS^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\det(A) \times \det(S^{-1}) \times (-1) = {}^tXS^{-1}X$  puis que  $Q(X) = -\det(A) = {}^tX((\det(S))S^{-1})X = {}^tXS'X$  où  $S' = (\det(S))S^{-1}$ .

Maintenant, la matrice  $S$  est définie positive et donc ses valeurs propres sont des réels strictement positifs. Les valeurs propres de la matrice  $S'$  sont les  $\frac{\det(S)}{\lambda}$  où  $\lambda$  décrit le spectre de  $S$  et donc la matrice  $S'$  est aussi une matrice symétrique définie positive.  $Q$  est donc une forme quadratique définie positive.

**n° 6 : 1)** (Quand  $x^2$  et  $y^2$  ont les mêmes coefficients, penser à faire une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ ) En posant  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$  et  $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$ , on obtient

$$x^2 + 10xy + y^2 = \frac{1}{2}(X + Y)^2 + 5(X + Y)(X - Y) + \frac{1}{2}(X - Y)^2 = 6X^2 - 4Y^2.$$

Ainsi, si on note  $(i, j)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  puis  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$  et  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$ , on a

$$x^2 + 10xy + y^2 = Q(xi + yj) = Q(Xe_1 + Ye_2) = 6X^2 - 4Y^2.$$

**2)** La matrice de  $Q$  dans la base canonique  $(i, j)$  de  $\mathbb{R}^2$  est  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ . Les deux nombres 5 et 10 ont une somme égale à 15 =  $\text{Tr}(A)$  et un produit égal à 50 =  $\det(A)$  et sont donc les valeurs propres de  $A$ . On sait alors que dans une base orthonormée  $(e_1, e_2)$  de vecteurs propres de  $A$  associée à la famille de valeurs propres (5, 10), on a  $Q(Xe_1 + Ye_2) = 5X^2 + 10Y^2$ . Déterminons une telle base.

$(A - 5I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0$  et donc  $\text{Ker}(A - 5I_2) = \text{Vect}(e_1)$  où  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$  puis  $\text{Ker}(A - 10I_2) = (\text{Ker}(A - 5I_2))^\perp = \text{Vect}(e_2)$  où  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ .

Donc, si  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$  et  $u = xi + yj = Xe_1 + Ye_2$ , alors  $q(u) = 6x^2 + 4xy + 9y^2 = 5X^2 + 10Y^2$ . De plus,  $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)$  et  $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y)$ .

**3)** La matrice de  $Q$  dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 4 - X & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 - X & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 - X \end{vmatrix} = (4 - X)(X^2 - 8X - 12) - \sqrt{6}(-\sqrt{6}X - 6\sqrt{6}) + 5\sqrt{2}(5\sqrt{2}X - 42\sqrt{2}) \\ &= -X^3 + 12X^2 + 36X - 432 = -(X - 6)(X + 6)(X - 12). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 6I_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x + 3y + \sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ -2x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x - \sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - 7(-\sqrt{2}x - \sqrt{3}y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ -12x - 4\sqrt{6}y = 0 \\ 12\sqrt{2}x + 8\sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}(-\sqrt{\frac{3}{2}}x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}z \\ y = -\sqrt{3}z \end{cases} \end{aligned}$$

et  $\text{Ker}(A - 6I_3) = \text{Vect}(e_1)$  où  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1)$ . De même,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + 6I_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{6}x + 15y + \sqrt{3}z = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y \\ 10x + \sqrt{6}y + 5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y) = 0 \\ 5\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5(-\sqrt{2}x - 5\sqrt{3}y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\sqrt{2}x - \sqrt{3}y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -\sqrt{2}x \end{cases} \end{aligned}$$

et  $\text{Ker}(A + 6I_3) = \text{Vect}(e_2)$  où  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -\sqrt{2})$ .

Enfin  $\text{Ker}(A - 12I_3) = \text{Vect}(e_3)$  où

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on pose  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$  alors  $PA^tP = \text{diag}(6, -6, 12)$  ou encore

$$Q(Xe_1 + Ye_2 + Ze_3) = 6X^2 - 6Y^2 + 12Z^2 \text{ où } \text{Mat}_{(i,j,k)}(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

**n° 7 :** 1) Soit  $P$  un élément de  $E$ . D'après un théorème de croissances comparées,  $P(k)P(-k)e^{-k} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$  et donc  $Q(P)$  existe.

Pour tout élément  $P$  de  $E$ ,  $Q(P) = B(P, P)$  où  $B$  est la forme bilinéaire symétrique définie sur  $E$  par

$$\forall (P_1, P_2) \in E^2, B(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (P_1(k)P_2(-k) + P_1(-k)P_2(k))e^{-k} \right)$$

et donc  $Q$  est une forme quadratique sur  $E$ .

2) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  dont les éléments sont les polynômes pairs et  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E$  dont les éléments sont les polynômes impairs.  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Soit  $P$  est un polynôme pair et non nul. Tout d'abord,  $Q(P) \sum_{k=0}^{+\infty} (P(k))^2 e^{-k} \geq 0$ . De plus, comme  $P$  ne peut admettre tout entier naturel pour racine, on a plus précisément  $Q(P) > 0$ . De même, si  $P$  est impair et non nul,  $Q(P) < 0$ .

Ainsi, la restriction de  $Q$  à  $F$  (resp.  $G$ ) est définie positive (resp. négative). Enfin, si  $P_1$  est pair et  $P_2$  est impair, on a

$$B(P_1, P_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(-k)e^{-k} = - \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(k)P_2(k)e^{-k} = - \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(-k)P_2(k)e^{-k} = -B(P_2, P_1) = -B(P_1, P_2),$$

et donc  $B(P_1, P_2) = 0$  ( $F$  et  $G$  sont orthogonaux pour  $B$ ).

Il existe une base de  $F$  dans laquelle  $Q|_F$  est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à  $\dim(F)$  et de même il existe une base de  $G$  dans laquelle  $Q|_G$  est combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à  $\dim(G)$ . Maintenant, si  $P$  est un polynôme quelconque de parties paire et impaire  $P_1$  et  $P_2$  respectivement,

$$Q(P) = Q(P_1 + P_2) = Q(P_1) + 2B(P_1, P_2) + Q(P_2) = Q|_F(P_1) + Q|_G(P_2).$$

Donc la réunion des deux bases ci-dessus est une base de  $E$  dans laquelle  $Q$  est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes dans laquelle  $\dim(F) = E\left(\frac{n}{2}\right) + 1$  coefficients sont strictement positifs et  $\dim(G) = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$  sont strictement négatifs. Finalement,

$$Q \text{ est donc non dégénérée de signature } s = \left( E\left(\frac{n}{2}\right) + 1, E\left(\frac{n+1}{2}\right) \right).$$

**n° 8 :**  $A$  est la matrice d'un produit scalaire  $\varphi$  dans une certaine base  $\mathcal{B}$  fixée de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{B}'$  l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base  $\mathcal{B}$  pour le produit scalaire  $\varphi$  et  $T$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ . La matrice  $T$  est triangulaire de même que la matrice  ${}^tT$ .

Puisque la base  $\mathcal{B}'$  est orthonormée pour le produit scalaire  $\varphi$ , la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}'$  est  $I_n$ . D'après les formules de changement de base,  $A = {}^tT(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}\varphi)T = {}^tTT$ .

**n° 9 :** Puisque la matrice  $A$  est définie positive, il existe d'après le n° 8 une matrice triangulaire supérieure inversible  $T$  telle que  $A = {}^t T T$ . Posons alors  $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ .

$$\det(A) = (\det(T))^2 = t_{1,1}^2 \dots t_{n,n}^2$$

Mais pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{i,i} = \sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geq t_{i,i}^2$  et donc  $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$ .

**Remarque.** On a montré au passage que les coefficients diagonaux  $a_{i,i}$  de  $A$  étaient des réels strictement positifs.