

# Planche n° 16. Coniques

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\*)** : Etudier les courbes dont une équation en repère orthonormé est :

- 1)  $2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$ .
- 2)  $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$ .
- 3)  $2x^2 - 4xy - 3x + 3y + 1 = 0$ .
- 4)  $-5x^2 + 6\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$ .
- 5)  $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x + 1 = 0$ .
- 6)  $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$ .
- 7)  $x^2 + y^2 - 3x - y + 2 = 0$ .
- 8)  $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$ .
- 9)  $(x + 2y - 4)(x - y - 1) = 3$ .
- 10)  $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$ .

**n° 2 (\*\*)** : Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

$$1) r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta} \quad 2) r = \frac{6}{2 + \cos\theta} \quad 3) r = \frac{2}{1 - \sin\theta}.$$

**n° 3 (\*\*\*)** : 1) Montrer que toute courbe de degré inférieur ou égal à 2 admet une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \frac{P(t)}{R(t)} \\ y(t) = \frac{Q(t)}{R(t)} \end{cases}$$

où P, Q et R sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et montrer réciproquement que toute courbe paramétrée du type précédent est une courbe de degré inférieur ou égal à 2.

2) Etudier la courbe  $\begin{cases} x = \frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y = \frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{cases}$ .

**n° 4 (\*\*)** : Déterminer l'orthoptique d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole qui soient perpendiculaires.

**n° 5 (\*\*\*)** : 1) (Droite de SIMSON) Soient ABC un triangle et M un point du plan.

Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R du point M sur les côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite passant par les points P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au cercle (ABC).

2) (Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle) Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. Fournir en particulier la construction des points de contacts.

**n° 6 (\*\*\*)** : ( $\mathcal{C}$ ) est le cercle de diamètre [AB]. ( $\mathcal{D}$ ) est la tangente en A au cercle ( $\mathcal{C}$ ). P est un point variable sur le cercle ( $\mathcal{C}$ ) et ( $\mathcal{T}$ ) la tangente en P au cercle ( $\mathcal{C}$ ). ( $\mathcal{T}$ ) recoupe ( $\mathcal{D}$ ) en S. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P coupe la droite (BS) en M. Ensemble des points M ?

**n° 7 (\*\*)** : L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j, k). On note ( $\Gamma$ ) la courbe d'équations

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Montrer que ( $\Gamma$ ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

**n° 8 (\*\*)** : Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation  $P(x) = P(y)$  dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

**n° 9 (\*\*\*) :** Soit  $(\mathcal{H})$  une hyperbole équilatère de centre  $O$  et  $P$  et  $Q$  deux points de  $(\mathcal{H})$  symétriques par rapport à  $O$ . Montrer que le cercle de centre  $P$  et de rayon  $PQ$  recoupe  $(\mathcal{H})$  en trois points formant un triangle équilatéral de centre  $P$ .

**n° 10 (\*\*)** : Equation cartésienne de la parabole tangente à  $(Ox)$  en  $(1,0)$  et à  $(Oy)$  en  $(0,2)$ .