

# Planche n° 17. Quadriques, cônes et cylindres

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

**n° 1 (\*\* I) :** Nature et « éléments caractéristiques » de la quadrique ( $\mathcal{S}$ ) dont une équation dans un repère orthonormé donné  $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$  de l'espace de dimension 3 est :

- 1)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 4y - 1 = 0$ .
- 2)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$ .
- 3)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$ .
- 4)  $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$ .
- 5)  $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0$ .
- 6)  $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$ .
- 7)  $(x - y)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y) + (x - y) = 0$ .
- 8)  $xy + yz = 1$ .
- 9)  $xy + yz + zx + 2y + 1 = 0$ .

**n° 2 (\*\*)** : Déterminer la quadrique contenant le point  $A(2, 3, 2)$  et les deux paraboles ( $\mathcal{P}$ ) d'équations  $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases}$  et ( $\mathcal{P}'$ ) d'équations  $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$ .

**n° 3 (\*\*\*)** : Démontrer que toute équation du second degré symétrique en  $x, y$  et  $z$  est l'équation d'une surface de révolution (une surface ( $\mathcal{S}$ ) est dite de révolution d'axe ( $\mathcal{D}$ ) si et seulement si ( $\mathcal{S}$ ) est invariante par toute rotation d'axe ( $\mathcal{D}$ )).

**n° 4 (\*\*\*)** : Former l'équation de la surface de révolution ( $\mathcal{S}$ ) engendrée par la rotation de la droite ( $\mathcal{D}$ )  $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$  autour de la droite ( $\Delta$ ) d'équations  $x = y = z$ . Quelle surface obtient-on ?

**n° 5 (\*\*\*)** : Equation du cône de sommet  $S$  et de directrice ( $\mathcal{C}$ ) dans les cas suivants :

- 1)  $S(0, 0, 0)$  et ( $\mathcal{C}$ ) :  $x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R}^*$ .
- 2)  $S(1, -1, 0)$  et ( $\mathcal{C}$ ) :  $\begin{cases} y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$ .

**n° 6 (\*\*\*)** : Trouver une équation du cône de sommet  $S$  circonscrit à la surface ( $\mathcal{S}$ ) quand

- 1)  $S(0, 5, 0)$  et ( $\mathcal{S}$ ) :  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,
- 2)  $S(0, 0, 0)$  et ( $\mathcal{S}$ ) :  $x^2 + xy + z - 1 = 0$ . (Préciser la courbe de contact.)

**(Définitions.** Le cône ( $\mathcal{C}$ ) de sommet  $S$  circonscrit à la surface ( $\mathcal{S}$ ) est la réunion des tangentes à ( $\mathcal{S}$ ) passant par  $S$ . D'autre part, une droite est tangente à la surface ( $\mathcal{S}$ ) en un point  $M$  si et seulement si elle passe par  $M$  et est contenue dans le plan tangent à ( $\mathcal{S}$ ) en  $M$ ).

**n° 7 (\*\*\*)** : Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la surface ( $\mathcal{S}$ ) d'équation  $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda = 0$  est-elle un cône du second degré ? En préciser alors le sommet et une directrice.

**n° 8 (\*)** : Montrer que l'arc paramétré  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) \\ y = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) \\ z = e^t \end{cases}$  est tracé sur un cône du second degré de sommet  $O$ .

**n° 9 (\*\*\*)** : Equation cartésienne du cylindre ( $\mathcal{C}$ ) de direction  $\vec{u}$  et de directrice ( $C$ ) dans les cas suivants :

- 1)  $\vec{u}(1, 0, 1)$  et ( $C$ ) :  $x = a \cos t, y = b \sin t, z = a \sin t \cos t$  ( $a$  et  $b$  tous deux non nuls).
- 2)  $\vec{u}(0, 1, 1)$  et ( $C$ ) :  $\begin{cases} y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ .

**n° 10 (\*\*)** : Equation du cylindre ( $\mathcal{C}$ ) de section droite la courbe (C) d'équations  $\begin{cases} z = x \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

**n° 11 (\*\* I)** : Equation cartésienne du cylindre de révolution ( $\mathcal{C}$ ) de rayon  $R$  et d'axe ( $\mathcal{D}$ ) d'équations  $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$ .  
Déterminer  $R$  pour que la droite ( $Oz$ ) soit tangente au cylindre.

**n° 12 (\*)** : Trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  qui sont parallèles au plan d'équation  $x + 4y + 6z = 0$ .

**n° 13 (\*\*)** : Trouver les plans tangents à la surface ( $\mathcal{S}$ ) d'équation  $x - 8yz = 0$  et contenant la droite ( $\mathcal{D}$ )  
d'équations  $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$ .

**n° 14 (\*\* I)** : **1)** Equation du cylindre de révolution ( $\mathcal{C}$ ) d'axe la droite d'équations  $x = y + 1 = 3z - 6$  et de rayon 3.

**2)** Equation du cône de révolution ( $\mathcal{C}$ ) d'axe la droite d'équations  $x = y + 1 = 3z - 6$ , de sommet  $S(0, -1, 2)$  et de demi-angle au sommet  $\frac{\pi}{3}$ .