

Planche n° 17. Quadriques. Corrigé

n° 1 : 1) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$.

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + (y - z)^2 = X^2 + 2Y^2$ en posant $X = x$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z)$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$

correspondant au changement de bases orthonormées de matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$ le repère orthonormé ainsi défini. La surface $(\mathcal{S})$ admet pour équation dans $\mathcal{R}'$ $X^2 + 2Y^2 - 4X + 2\sqrt{2}(Y + Z) - 1 = 0$ ou encore

$$(X - 2)^2 + 2\left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(Z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

La surface $(\mathcal{S})$ est un parabolôïde elliptique de sommet S de coordonnées $\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathcal{R}'$ et donc $(2, 2, 1)$ dans $\mathcal{R}$.

2) En posant $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$ et $Z = z$, on obtient : $2X^2 + Z^2 = 1$.

La surface $(\mathcal{S})$ est un cylindre elliptique d'axe (OY) ou encore d'axe la droite d'équations $\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$.

3) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$.

La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3 + (X-1) + (X-1) = (1-X)((1-X)^2 - 2) \\ &= (1-X)(1 + \sqrt{2} - X)(1 + \sqrt{2} - X). \end{aligned}$$

Q est de rang 3 et de signature $(2, 1)$. La surface $(\mathcal{S})$ peut être un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône de révolution.

$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

$\text{Ker}(A - (1 + \sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1)$ et $\text{Ker}(A - (1 - \sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, -1)$

La matrice de passage correspondante est la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathcal{S})$ dans le repère (O, e_1, e_2, e_3) .

$$\begin{aligned}
& X^2 + (1 + \sqrt{2})Y^2 + (1 - \sqrt{2})Z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(Y + Z) - \frac{1}{2}(\sqrt{2}X - Y + Z) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}X + Y - Z) + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left(Y^2 + \frac{3 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} Y \right) + (1 - \sqrt{2}) \left(Z^2 - \frac{3 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} Z \right) + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left(Y + \frac{3 + \sqrt{2}}{2(2 + \sqrt{2})} \right)^2 - \frac{(3 + \sqrt{2})^2}{8(1 + \sqrt{2})} + (1 - \sqrt{2}) \left(Z - \frac{3 - \sqrt{2}}{2(2 - \sqrt{2})} \right)^2 - \frac{(3 - \sqrt{2})^2}{8(1 - \sqrt{2})} + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left(Y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + (1 - \sqrt{2}) \left(Z - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{8(1 + \sqrt{2})} + \frac{11 - 6\sqrt{2}}{8(1 - \sqrt{2})} - 1 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left(Y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + (1 - \sqrt{2}) \left(Z - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = -\frac{3}{4} \\
& \Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2 - \frac{4(1 + \sqrt{2})}{3} \left(Y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{3} \left(Z - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathcal{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes de centre de coordonnées $\left(0, -1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

4) On pose $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y)$ et $Z = z$. Dans le repère $\mathcal{R}'$ ainsi défini, la surface $(\mathcal{S})$ admet pour équation $5X^2 + 5Z^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(X + 2Y) + \frac{4}{\sqrt{5}}(-2X + Y) = 0$ ou encore $5 \left(X - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5Z^2 = 1$.

La surface $(\mathcal{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équations $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ Z = 0 \end{cases}$ dans $\mathcal{R}'$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

5) $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 3(y + 2)$. La surface $(\mathcal{S})$ est un cylindre parabolique de direction (Oz) .

6) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = 7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz$. La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 10 \\ 2 & -2 & 8 \\ 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} 7 - X & 2 & 10 \\ 2 & -2 - X & 8 \\ 10 & 8 & 4 - X \end{vmatrix} = (7 - X)(X^2 - 2X - 72) - 2(-2X - 72) + 10(10X + 36) \\
&= -X^3 + 9X^2 + 162X = -X(X + 9)(X - 18).
\end{aligned}$$

Donc Q est de rang 2 et de signature $(1, 1)$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 2y + 10z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 10x + 8y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4z \\ 5x + 4y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases} \text{ et } \text{Ker}(A) = \text{Vect}(e_1) \text{ où } e_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1).$$

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(A + 9I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 2y + 10z = 0 \\ 2x + 7y + 8z = 0 \\ 10x + 8y + 13z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8x - 5z \\ z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases} \text{ et } \text{Ker}(A + 9I_3) = \text{Vect}(e_2) \text{ où } e_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2).$$

$$\text{Ker}(A - 18I_3) = \text{Vect}(e_3) \text{ où } e_3 = -e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2).$$

La matrice de passage du changement de bases ainsi défini est $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathcal{S})$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$

$$\begin{aligned}
& 7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0 \\
& \Leftrightarrow -9Y^2 + 18Z^2 - 12(-2X + Y + 2Z) + 24(2X + 2Y + Z) - 36(X - 2Y + 2Z) + 36 = 0 \\
& \Leftrightarrow -9Y^2 + 18Z^2 + 36X + 108Y - 72Z + 36 = 0 \Leftrightarrow -Y^2 + 2Z^2 + 4X + 12Y - 8Z + 4 = 0 \\
& \Leftrightarrow 4(X + 8) = (Y - 6)^2 - 2(Z - 2)^2.
\end{aligned}$$

La surface ($\mathcal{S}$) est un parabolôïde hyperbolique. Son point selle est le point de coordonnées $(-8, 6, 2)$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

7) La surface ($\mathcal{S}$) admet pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx - x + y = 0$.

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx$. La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$

$$\text{est } A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \text{ Sp}(A) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right). \text{ Une base orthonormée } (e_1, e_2, e_3) \text{ de vecteurs propres est la famille de}$$

$$\text{matrice } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$, la surface ($\mathcal{S}$) admet pour équation cartésienne $\frac{3}{2}(X^2 + Y^2) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\right) = 0$ ou encore $\frac{3}{2}(X^2 + Y^2) - \sqrt{2}X = 0$ ou enfin $\left(X - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + Y^2 = \frac{2}{9}$.

La surface ($\mathcal{S}$) est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équation $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ Y = 0 \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

8) En posant $X = y$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$ (et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z)$), $xy + yz = 0 \Leftrightarrow XY = \sqrt{2}$.

La surface ($\mathcal{S}$) est un cylindre hyperbolique.

9) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$.

La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{Sp}(A) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ et donc la surface ($\mathcal{S}$)

est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône du second degré et dans tous les cas une surface de révolution (puisque les deux valeurs propres négatives sont égales) d'axe de direction $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(1, 1, 1)$ et passant par le point critique $\Omega(-1, 1, -1)$.

Quand on se place dans le repère (Ω, i, j, k) , la surface ($\mathcal{S}$) admet pour équation $XY + YZ + ZX + 2 = 0$ (car $f(-1, 1, -1) = 2$) puis dans le repère (Ω, e_1, e_2, e_3) , $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + 2 = 0$ ou encore $\frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1$.

La surface ($\mathcal{S}$) est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

n° 2 : On cherche $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j) \neq (0, \dots, 0)$ tel que la surface ($\mathcal{S}$) d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$ contienne la parabole ($\mathcal{P}$) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, la parabole

($\mathcal{P}'$) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = \frac{t^2}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, et le point $A(2, 3, 2)$.

$$(\mathcal{P}) \subset (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{a}{4}t^4 + bt^2 + dt^3 + gt^2 + 2ht + j = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{a}{4}t^4 + dt^3 + (b + g)t^2 + 2ht + j = 0$$

$$\Leftrightarrow a = d = h = j = 0 \text{ et } g = -b.$$

Donc ($\mathcal{P}$) est contenue dans ($\mathcal{S}$) si et seulement si ($\mathcal{S}$) a une équation de la forme $by^2 + cz^2 + 2eyz + 2fzx - 2bx + 2iz = 0$ avec $(b, c, e, f, i) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$.

$$(\mathcal{P}') \subset (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, bt^2 + \frac{c}{4}t^4 + et^3 + it^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{c}{4}t^4 + et^3 + (b + i)t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c = e = 0 \text{ et } i = -b.$$

Donc ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}'$) sont contenues dans ($\mathcal{S}$) si et seulement si ($\mathcal{S}$) a une équation de la forme $by^2 + 2fzx - 2bx - 2bz = 0$ avec $(b, f) \neq (0, 0)$.

Enfin, $A \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow 9b + 8f - 4b - 4b = 0 \Leftrightarrow b = -8f$ et $f \neq 0$. On trouve donc une et une seule quadrique à savoir la surface ($\mathcal{S}$) d'équation $-4y^2 + zx + 8x + 8z = 0$.

En posant $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $Y = y$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$, on obtient

$$\begin{aligned} -4y^2 + zx + 8x + 8z &= -4Y^2 + \frac{1}{2}(X+Z)(X-Z) + 8\sqrt{2}X \\ &= \frac{1}{2}(X+8\sqrt{2})^2 - 4Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 - 64. \end{aligned}$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation cartésienne de la surface $(\mathcal{S})$ est $\frac{1}{128}(X+8\sqrt{2})^2 - \frac{1}{16}Y^2 + \frac{1}{128}Z^2 = 1$ et $(\mathcal{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes.

n° 3 : Soit $(\mathcal{S})$ une surface du second degré d'équation $f(x, y, z) = 0$ où f est symétrique en x , y et z . Soient σ_1 , σ_2 et σ_3 les trois fonctions symétriques élémentaires en x , y et z .

Puisque f est symétrique en x , y et z , f est un polynôme en σ_1 , σ_2 et σ_3 . f est d'autre part un polynôme de degré 2 en x , y et z et donc

$$\text{il existe } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{ tel que } f = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 + c\sigma_1 + d.$$

Réciproquement, si f est de la forme ci-dessus, alors f est symétrique en x , y et z .

Puisque $\sigma_2 = xy + yz + zx = \frac{1}{2}((x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2))$, $(\mathcal{S})$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)(x+y+z)^2 - b(x^2 + y^2 + z^2) + c(x+y+z) + d = 0 \text{ où } (a, b) \neq (0, 0).$$

Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par O dirigée par $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ($\vec{n}$ est vecteur normal à tout plan d'équation $x+y+z=k$, $k \in \mathbb{R}$) et soit r une rotation quelconque d'axe $(\mathcal{D})$.

Si M est un point de coordonnées (x, y, z) et $M' = r(M)$ a pour coordonnées (x', y', z') alors $x+y+z = x'+y'+z'$ car M et M' sont dans un plan perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ et $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ car une rotation est une isométrie et car $r(O) = O$.

Finalement, pour toute rotation r d'axe $(\mathcal{D})$, $M \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow r(M) \in (\mathcal{S})$ et donc la surface $(\mathcal{S})$ est une surface de révolution d'axe $(\mathcal{D})$.

n° 4 : Soit $A(a, b, c)$ un point quelconque de l'espace E_3 .

Déterminons un système d'équation du cercle (C_A) d'axe (Δ) d'équations $x = y = z$ passant par A .

Ce cercle est par exemple l'intersection du plan passant par A de vecteur normal $(1, 1, 1)$ et de la sphère de centre O et de rayon OA .

$$\text{Un système d'équations de } (C_A) \text{ est } \begin{cases} x+y+z = a+b+c \\ x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2 \end{cases}.$$

Déterminons alors une équation cartésienne de la surface $\mathcal{S}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x, y, z)$ soit un point de $(\mathcal{S})$ est $(C_M) \cap (\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Donc

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{S}) &\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x+y+z = \alpha+\beta+\gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \\ x+y+z = \gamma+2+2\gamma+1+\gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \alpha = \gamma+2 \\ \beta = 2\gamma+1 \\ \gamma = \frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2 + \left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2 + \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z+5)^2 + 4(x+y+z-1)^2 + (x+y+z-3)^2 \\ &\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = 6(x+y+z)^2 - 2(x+y+z) + 38 \\ &\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $(\mathcal{S})$ est $5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0$.

La matrice de la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto 5(x^2 + y^2 + z^2) - 6(xy + yz + zx)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 8, valeur propre d'ordre 2 associée au plan d'équation $x + y + z = 0$ et -1 valeur propre d'ordre 1 associée à la droite d'équation. Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ et $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$$M \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow 8x'^2 + 8y'^2 - z'^2 - \sqrt{3}z' - 19 = 0 \Leftrightarrow 8\left(x' - \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 - 8y'^2 - z'^2 = 19 + \frac{3}{32}.$$

La surface $(\mathcal{S})$ est un hyperboloïde à une nappe.

n° 5 : 1) On note $(\mathcal{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{S}) \setminus \{O\} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / O + \lambda \overrightarrow{OM} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} \lambda x = t \\ \lambda y = t^2 \\ \lambda z = t^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} t = \lambda x \\ y = \lambda x^2 \\ z = \lambda^2 x^3 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 x^3 \\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z = y^2 x. \end{aligned}$$

Si on récupère le point O , $M(x, y, z) \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow (x = y = 0 \text{ ou } xy \neq 0) \text{ et } z = y^2 x$.

On peut noter que la surface d'équation $z = y^2 x$ est la réunion du cône, sommet O compris, et des axes (Ox) et (Oy) qui ne font pas partie du cône (à l'exception du point O).

2) On note $(\mathcal{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{S}) \setminus \{S\} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / S + \lambda \overrightarrow{SM} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / (1 + \lambda(x-1), -1 + \lambda(y+1), \lambda z) \in (\mathcal{C}) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} -1 + \lambda(y+1) + \lambda z = 1 \\ (1 + \lambda(x-1))^2 + (-1 + \lambda(y+1))^2 = \lambda z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{y+z+1}(x-1)\right)^2 + \left(-1 + \frac{2}{y+z+1}(y+1)\right)^2 = \frac{2}{y+z+1}z \\ &\Leftrightarrow (2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z \text{ et } y + z + 1 \neq 0. \end{aligned}$$

En résumé, $M(x, y, z)$ est dans $(\mathcal{S})$ si et seulement si $M = S$ ou $M \neq S$ et $(2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z$ et $y + z + 1 \neq 0$.

Maintenant le point $S(1, -1, 0)$ est dans le plan (P) d'équation $y + z + 1 = 0$ et la courbe $(\mathcal{C})$ n'a aucun point dans ce plan. Donc la surface $(\mathcal{S})$ contient un et un seul point de ce plan.

Notons alors $(\mathcal{S}')$ la surface d'équation $(2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z$ et vérifions que l'intersection de $(\mathcal{S}')$ et de (P) est $\{S\}$. Ceci montrera que $(\mathcal{S}') = (\mathcal{S})$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{S}) \cap (P) &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ (2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M = S \end{aligned}$$

Finalement $(\mathcal{S}') = (\mathcal{S})$. Une équation de $(\mathcal{S})$ est donc $(2x + y + z - 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 2(y + z + 1)z$ ou encore $4x^2 + 2y^2 + 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 2y - 6z + 2 = 0$. $(\mathcal{S})$ est donc un cône du second degré.

n° 6 : Notons (C) le cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathcal{S})$.

1) Ici $(\mathcal{S})$ est la sphère de centre O et de rayon 3 et le point S est extérieur à cette sphère. Donc

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (C) &\Leftrightarrow M = S \text{ ou } M \neq S \text{ et } d(O, (SM)) = 3 \Leftrightarrow M = S \text{ ou } M \neq S \text{ et } \|\overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \\ &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \Leftrightarrow \|(0, 5, 0) \wedge (x, y - 5, z)\| = 3\|(x, y - 5, z)\| \\ &\Leftrightarrow (5z)^2 + (5x)^2 = 9(x^2 + (y - 5)^2 + z^2) \Leftrightarrow 16x^2 - 9(y - 5)^2 + 16z^2 = 0. \end{aligned}$$

2) Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $(\mathcal{S})$ (c'est-à-dire tel que $x_0^2 + x_0 y_0 + z_0 - 1 = 0$). $(\mathcal{S})$ est une surface du second degré. Une équation du plan tangent à $(\mathcal{S})$ en M_0 est fournie par la règle de dédoublement des termes :

$$xx_0 + \frac{1}{2}(y_0 x + x_0 y) + \frac{1}{2}(z + z_0) - 1 = 0.$$

Ce plan tangent contient le point $S(0, 0, 0)$ si et seulement si $z_0 = 2$ ce qui montre déjà que la courbe de contact admet pour système d'équations $\begin{cases} x^2 + xy + z - 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$. C'est une hyperbole du plan d'équation $z = 2$.

Le cône de sommet S circonscrit à $(\mathcal{S})$ est alors le cône de sommet S et de directrice $(\mathcal{C})$ d'équations $\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$. On trouve la surface d'équation $4x^2 + 4xy + z^2 = 0$. C'est un cône du second degré.

n° 7 : Une équation de $(\mathcal{S})$ est encore $xy + yz + zx - \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda = 0$.

La matrice de la forme quadratique $Q : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$ dans la base (i, j, k) est $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est les

valeurs propres de cette matrice sont $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ et 1 . Le rang de Q est 3 et sa signature est $(1, 2)$. La surface $(\mathcal{S})$ est à priori soit un hyperboloïde, soit un cône du second degré. Donc $(\mathcal{S})$ est un cône du second degré si et seulement si son (unique) centre de symétrie qui est aussi l'unique point critique de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda$ appartient à $(\mathcal{S})$.

Point critique.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = \lambda \\ z + x = \lambda \\ x + y = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\lambda}{2}.$$

On note alors Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

$(\mathcal{S})$ est un cône $\Leftrightarrow \Omega \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \frac{3\lambda^2}{4} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$.

• Si $\lambda = 0$, $(\mathcal{S})$ admet pour équation $xy + yz + zx = 0$. Dans le repère (O, X, Y, Z) où $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y - 2z)$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$, $(\mathcal{S})$ admet pour équation cartésienne $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 = 0$ ou encore $(\mathcal{S})$ est le cône de révolution de sommet O et de section droite le cercle d'équations $\begin{cases} Z = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \end{cases}$ dans (O, X, Y, Z) ou encore $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ dans (O, x, y, z) .

Puisque $(\mathcal{S})$ est un cône de révolution de sommet O et d'axe la droite d'équations $x = y = z$, il est plus intéressant de fournir le demi angle au sommet θ . Le point $A(1, 1, 1)$ est sur l'axe et le point $M(2, 2, -1)$ est sur le cône. Donc

$$\theta = \text{Arccos} \left(\frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OM}|} \right) = \text{Arccos} \left(\frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \text{Arccos} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

• Si $\lambda = \frac{4}{3}$, $(\mathcal{S})$ admet pour équation $xy + yz + zx - \frac{4}{3}(x + y + z) + \frac{4}{3} = 0$ dans (O, i, j, k) ou encore $XY + XZ + YZ = 0$ dans (Ω, i, j, k) ce qui ramène au cas précédent.

n° 8 : Pour tout réel t , $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \frac{1}{4}e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2) = \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(z(t))^2$ et le support de l'arc considéré est contenu dans le cône de révolution d'équation $z^2 = 2(x^2 + y^2)$.

n° 9 : 1)

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists m \in (\mathbb{C}) / M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a \cos t + \lambda \\ y = b \sin t \\ z = a \cos t \sin t + \lambda \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} \lambda = x - a \cos t \\ y = b \sin t \\ z = a \cos t \sin t + x - a \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b \sin t \\ z = a \cos t \sin t + x - a \cos t \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b \sin t \\ z - x = a \cos t (\sin t - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b \sin t \\ b(z - x) = a \cos t (y - b) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow b^4(z - x)^2 + y^2 a^2 (y - b)^2 = a^2 b^2 (y - b)^2.
 \end{aligned}$$

En effet,

• $\Rightarrow$ / s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = b \sin t$ et $b(z - x) = a \cos t (y - b)$ alors

$$\begin{aligned}
 b^4(z - x)^2 + y^2 a^2 (y - b)^2 &= b^2 a^2 \cos^2 t (y - b)^2 + b^2 \sin^2 t a^2 (y - b)^2 = a^2 b^2 (y - b)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \\
 &= a^2 b^2 (y - b)^2.
 \end{aligned}$$

• $\Leftarrow$ / Réciproquement, si $b^4(z - x)^2 + y^2 a^2 (y - b)^2 = a^2 b^2 (y - b)^2$ alors $b^4(z - x)^2 = a^2 (y - b)^2 (b^2 - y^2)$ et donc ou bien $y = b$, ou bien $b^2 - y^2 \geq 0$. Par suite, il existe un réel t tel que $y = b \sin t = b \sin(\pi - t)$ puis

$$\begin{aligned}
 b^4(z - x)^2 &= a^2 (y - b)^2 (b^2 - y^2) \Rightarrow b^4(z - x)^2 = a^2 (b \sin t - b)^2 b^2 \cos^2 t \Rightarrow b(z - x) = \pm a \cos t (b \sin t - b) \\
 &\Rightarrow b(z - x) = a \cos t (y - b) \text{ ou } b(z - x) = a \cos(\pi - t) (y - b)
 \end{aligned}$$

et il existe un réel t' tel que $y = b \sin t'$ et $b(z - x) = a \cos t' (y - b)$.

2)

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists m \in (\mathbb{C}) / M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = X \\ y = Y + \lambda \\ z = Z + \lambda \\ Y + Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} (y - \lambda) + (z - \lambda) = 1 \\ x^2 + (y - \lambda)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y + z - 1)\right)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 + (y - z + 1)^2 = 4.
 \end{aligned}$$

n° 10 : La direction du cylindre est orthogonale au plan d'équation $z = x$ et est donc engendrée par le vecteur $\vec{u}(1, 0, -1)$.

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists m \in (\mathbb{C}) / M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = X - \lambda \\ y = Y \\ z = Z + \lambda \\ Z = X \\ 2X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} z - \lambda = x + \lambda \\ 2(x + \lambda)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}(z - x)\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x + z)^2 + 2y^2 = 2.
 \end{aligned}$$

n° 11 : Un repère de $(\mathcal{D})$ est $(A, \vec{u})$ où $A(2, 1, 0)$ et $\vec{u}(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
 M \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow d(M, (\mathcal{D})) = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|^2 = R^2 \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow \|(x - 2, y - 1, z) \wedge (1, 1, 1)\|^2 = R^2 \|(1, 1, 1)\|^2 \\
 &\Leftrightarrow (y - z - 1)^2 + (x - z - 2)^2 + (x - y - 1)^2 = 3R^2 \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 6z + 6 - 3R^2 = 0.
 \end{aligned}$$

La droite (Oz) est tangente à $(\mathcal{C})$ si et seulement si $d((Oz), (\mathcal{D})) = R$.

$$(\text{Oz}) \text{ est tangente à } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \frac{[\overrightarrow{\text{OA}}, \vec{k}, \vec{u}]^2}{\|\vec{k} \wedge \vec{u}\|^2} = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right|^2 = \|(-1, 1, 0)\|^2 \Leftrightarrow 1 = 2\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathbb{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

n° 12 : En un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de l'ellipsoïde la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent : $xx_0 + 2yy_0 + 3zz_0 = 21$.

Ce plan est parallèle au plan d'équation $x + 4y + 6z = 0$ si et seulement si le vecteur $(x_0, 2y_0, 3z_0)$ est colinéaire au vecteur $(1, 4, 6)$ ou encore si et seulement si $2x_0 = y_0 = z_0$.

Enfin le point $(x_0, 2x_0, 2x_0)$ est sur l'ellipsoïde si et seulement si $x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21$ ce qui équivaut à $x_0^2 = 1$.

Les plans cherchés sont les deux plans d'équations respectives $x + 4y + 6z = 21$ et $x + 4y + 6z = -21$.

n° 13 : Le plan tangent (P_0) en (x_0, y_0, z_0) tel que $x_0 - 8y_0z_0 = 0$ admet pour équation $(x + x_0) - 8(z_0y + y_0z) = 0$ ou encore $x - 8z_0y - 8y_0z + 8y_0z_0 = 0$.

Un repère de $(\mathcal{D})$ est $(A, \vec{u})$ où $A(-2, 1, 0)$ et $\vec{u}(4, 0, -1)$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}) \subset (P_0) &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, (-2 + 4\lambda) - 8z_0 + 8y_0\lambda + 8y_0z_0 = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, (8y_0 + 4)\lambda + 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8y_0 + 4 = 0 \text{ et } 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } z_0 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On trouve un et un seul plan tangent contenant la droite $(\mathcal{D})$, à savoir le plan tangent à $(\mathcal{S})$ en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ d'équation $3x + 4y + 12z + 2 = 0$.

n° 14 : 1) Un repère de $(\mathcal{D})$ est $(A, \vec{u})$ où $A(0, -1, 2)$ et $\vec{u}(3, 3, 1)$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow d(M, (\mathcal{D})) = 3 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|^2 = 9\|\vec{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|(x, y + 1, z - 2) \wedge (3, 3, 1)\|^2 = 9 \times 19 \Leftrightarrow (y - 3z + 7)^2 + (x - 3z + 6)^2 + 9(x - y - 1)^2 = 171. \end{aligned}$$

2) Un repère de $(\mathcal{D})$ est $(A, \vec{u})$ où $A(0, -1, 2)$ et $\vec{u}(3, 3, 1)$. De plus, $S = A$.

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{AM \times \|\vec{u}\|} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})^2 = \frac{1}{4}AM^2\|\vec{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 4(3x + 3(y + 1) + (z - 2))^2 = 19(x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2) \\ &\Leftrightarrow 4(3x + 3y + z + 1)^2 - 19(x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 17x^2 + 17y^2 - 15z^2 + 72xy + 24xz + 24yz + 24x - 14y + 84z - 91 = 0. \end{aligned}$$