

Planche n° 23. Intégrales curvilignes. Intégrales multiples

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

n° 1 ()** : Calculer l'intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

- 1) $\omega = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x + 1$ joignant les points $(0, -1)$ et $(0, 1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.
- 2) $\omega = (x - y^3) dx + x^3 dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.
- 3) $\omega = xyz dx$ et C est l'arc $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

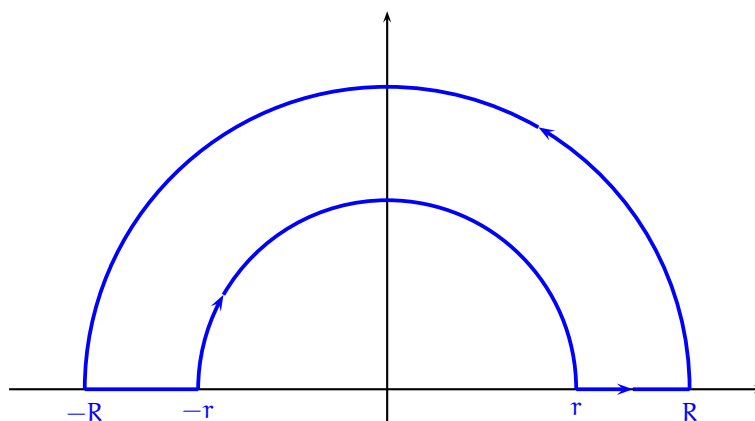
n° 2 ()** : Soit $\omega = x^2 dx + y^2 dy$. Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec $\omega = y^2 dx + x^2 dy$.

n° 3 ()** : Calculer les intégrales multiples suivantes

- 1) $I = \iint_D (x + y) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$.
- 2) $I = \iint_{[-1, 1]^2} |x + y| dx dy$.
- 3) $I = \iint_D xy dx dy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.
- 4) $I = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$.
- 5) $I = \iint_{x \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$.
- 6) $I = \iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz dx dy dz$.
- 7) $I = \iiint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1} z dx dy dz$.

n° 4 (*) I** : (Un calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$).

1) r et R sont deux réels strictement positifs tels que $r < R$. On considère le contour Γ orienté suivant



Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} ((x \sin x - y \cos x) dx + (x \cos x + y \sin x) dy)$$

le long de ce contour orienté.

2) En déduire $\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ en fonction d'une autre intégrale.

3) En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

n° 5 (*) :** Soient $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in]0, +\infty[^4$ tel que $p_1 < p_2$ et $q_1 < q_2$.

Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leq x^2 \leq 2q_1y\}$.

n° 6 (*) I) :** Calculer le volume de $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ (boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour $\|\cdot\|_2$).

n° 7 ()** : Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$.

n° 8 (**) :** (**Inégalité isopérimétrique**) Une courbe fermée (C) est le support d'un arc paramétré γ de classe C^1 régulier et simple. On note $\mathcal{L}$ sa longueur et $\mathcal{A}$ l'aire délimitée par la courbe fermée (C) . Montrer que

$$\mathcal{A} \leq \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord $\mathcal{L} = 2\pi$ et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de PARSEVAL aux intégrales permettant de calculer $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ et on comparera les sommes des séries obtenues.

n° 9 (*) :** Calculer $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (x^2 - y^2) dx dy$.