

Planche n° 23. Intégrales curvilignes. Intégrales multiples. Corrigé

n° 1 : 1) C est l'arc paramétré $t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right)$, t variant en croissant de -1 à 1 .

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_{-1}^1 \left(\frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt \\ &= 0 \text{ (fonction impaire).}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = 0.}$$

2)

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t)) dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1 - \cos(4t))\right) dt = 2\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.$$

3)

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t \cos t \sin t)(-\sin t) dt = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^3 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^4 t \sin t) dt = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= -\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_C \omega = -\frac{2}{15}.$$

n° 2 : 1) $\omega = x^2 dx + y^2 dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et est fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

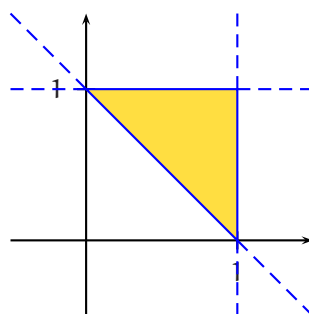
On en déduit que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de SCHWARZ. Par suite, l'intégrale de ω le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.

2) $\omega = y^2 dx + x^2 dy$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et n'est pas fermée car $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. On en déduit que ω n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$. L'intégrale de ω le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.

On parcourt le cercle C le cercle de centre (a, b) et de rayon $R > 0$ une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré $\gamma : t \mapsto (a + R \cos t, b + R \sin t)$, t variant en croissant de 0 à 2π .

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} ((b + R \sin t)^2 (-R \sin t) + (a + R \cos t)^2 (R \cos t)) dt \\
&= R \int_0^{2\pi} (a \cos t - b \sin t + 2aR \cos^2 t - 2bR \sin^2 t + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t)) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (2a \cos^2 t - 2b \sin^2 t + R(\cos^3 t - \sin^3 t)) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos t) - b(1 - \cos t) + R(\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t)) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (a - b + R(\cos t - \sin t)(1 + \cos t \sin t)) dt \\
&= R^2 \left(2\pi(b - a) + \int_0^{2\pi} R(\cos t - \sin t + \cos^2 t \sin t - \cos t \sin^2 t) dt \right) \\
&= 2\pi R^2(b - a).
\end{aligned}$$

n° 3 : 1) Représentons le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$.



$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x + y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x + y) dy \right) dx \text{ (ou aussi } \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x + y) dx \right) dy) \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

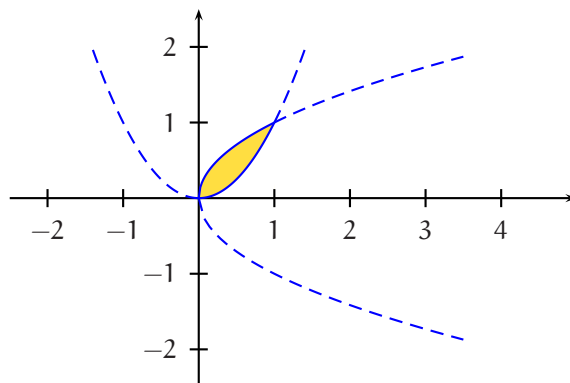
$$\boxed{\iint_D (x + y) dx dy = \frac{2}{3}.$$

2) Si on pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = |x + y|$ alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ ou encore f prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à O . Puisque le point O est centre de symétrie de $[-1, 1]^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{-1 \leq x, y \leq 1, x+y \geq 0} f(x, y) dx dy + \iint_{-1 \leq x, y \leq 1, x+y \leq 0} f(x, y) dx dy \\
&= 2 \iint_{-1 \leq x, y \leq 1, x+y \geq 0} (x + y) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^1 (x + y) dy \right) dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x}^{y=1} dx = 2 \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 2 \right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2} |x + y| dx dy = \frac{8}{3}.$$

3) Représentons le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.



$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \right) x \, dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}.$$

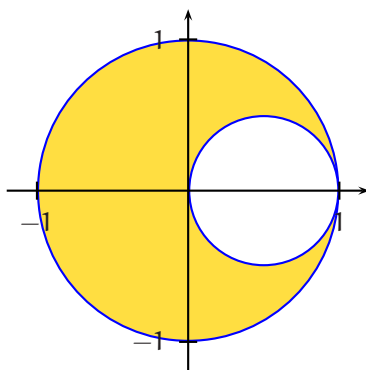
4) En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy = \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \frac{1}{1+r^2} r \, dr \, d\theta \\ &= \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \, dr \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \text{ (intégrales indépendantes)} \\ &= 2\pi \times \left[\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy = \pi \ln 2.}$$

5) Posons $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. Puisque $x \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$, D est l'intersection de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, bord compris. Soit M un point du plan. On note (r, θ) un couple de coordonnées polaires de M tel que $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$M \in D \Leftrightarrow r \cos \theta \leq r^2 \leq 1 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } (0 < r \leq 1 \text{ et } r \geq \cos \theta).$$



En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= 2 \iint_{x \leq x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy = 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{\cos \theta}^1 \frac{r}{(1 + r^2)^2} dr \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{(1 + r^2)^2} dr \right) d\theta \right) \\
&= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2(1 + r^2)} dr \right]_{\cos \theta}^1 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[-\frac{1}{2(1 + r^2)} dr \right]_0^1 d\theta \right) \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \cos^2 \theta} - \frac{1}{2} \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta} + 1} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \tan^2 \theta} d(\tan \theta) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\iint_{x \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

6)

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_y^1 z dz \right) y dy \right) x dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{2} (1 - y^2) y dy \right) x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_x^1 (y - y^3) dy \right) x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_x^1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) x dx \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 (x^5 - 2x^3 + x) dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

$$\iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz dx dy dz = \frac{1}{48}.$$

7) En sommant par tranches, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1} z dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 - \sqrt{z}} dx dy \right) z dz \\
&= \int_0^1 \left(\iint_{\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq 1} (1 - \sqrt{z})^4 du dv \right) z dz \quad (\text{en posant } x = (1 - \sqrt{z})^2 u \text{ et } y = (1 - \sqrt{z})^2 v) \\
&= \mathcal{A}(D) \times \int_0^1 z (1 - \sqrt{z})^4 dz \quad \text{où } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{u} + \sqrt{v} \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 \left(\int_0^{(1 - \sqrt{u})^2} dv \right) du = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{u} + u) du = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

et

$$\int_0^1 z (1 - \sqrt{z})^4 dz = \int_0^1 (z - 4z^{3/2} + 6z^2 - 4z^{5/2} + z^3) dz = \frac{1}{2} - \frac{8}{5} + 2 - \frac{8}{7} + \frac{1}{4} = \frac{1}{140}.$$

Finalement

$$\iiint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1} z dx dy dz = \frac{1}{840}.$$

n° 4 : 1) La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. D'après le théorème de SCHWARZ, sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la forme différentielle ω est exacte si et seulement si la forme différentielle ω est fermée.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, posons $P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \sin x - y \cos x)$ et $Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \cos x + y \sin x)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}(x \cos x + y \sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(-x \sin x + \cos x + y \cos x) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}(-2x(x \cos x + y \sin x) + (x^2 + y^2)(-x \sin x + \cos x + y \cos x)) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}((-x^2 + y^2 + x^2y + y^3) \cos x + (-2xy - x^3 - xy^2) \sin x),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \sin x - y \cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}(x \sin x - y \cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(-\cos x) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}(-(x^2 + y^2)(x \sin x - y \cos x) - 2y(x \sin x - y \cos x) - (x^2 + y^2) \cos x) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2}((-x^2 + y^2 + x^2y + y^3) \cos x + (-2xy - x^3 - xy^2) \sin x) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle ω est exacte sur tout ouvert étoilé Ω contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On choisit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \leq 0\}$. Ω est un ouvert étoilé (en tout point de la forme $(0, y)$, $y > 0$) de $\mathbb{R}^2$ contenant le contour fermé Γ . Puisque ω est exacte sur Ω , on sait alors que $\int_{\Gamma} \omega = 0$.

2) Le contour Γ est constitué de 4 arcs :

- Γ_1 est l'arc $t \mapsto (t, 0)$, t variant en croissant de r à R ,
- Γ_2 est l'arc $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$, t variant en croissant de 0 à π .
- Γ_3 est l'arc $t \mapsto (t, 0)$, t variant en croissant de $-R$ à $-r$,
- Γ_4 est l'arc $t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$, t variant en décroissant de π à 0 .

D'après la question 1), $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} \omega &= \int_r^R (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt = \int_r^R P(t, 0) dt \\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2} \times t \sin t dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_3} \omega = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t} dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt$ (puisque la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire) et donc $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = 2 \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ puis pour tout $(r, R) \in]0, +\infty[^2$ tel que $r < R$,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega \right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \omega &= \int_0^\pi (P(R \cos t, R \sin t)(- \sin t) + Q(R \cos t, R \sin t)(\cos t)) dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R \sin t}((\cos t \sin(R \cos t) - \sin t \cos(R \cos t))(- \sin t) + (\cos t \cos(R \cos t) + \sin t \sin(R \cos t))(\cos t)) dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt.\end{aligned}$$

De même, $\int_{\Gamma_4} \omega = \int_\pi^0 e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt = - \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt$ et on a montré que

$$\forall (r, R) \in]0, +\infty[^2, r < R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt - \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt \right).$$

3) • Etudions $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt$. Pour $R > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt \right| &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} |\cos(R \cos t)| dt \leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)} dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } [0, \frac{\pi}{2}]) \\ &= \frac{\pi}{R} \left[-e^{-2Rt/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-2R}) \\ &\leq \frac{\pi}{R}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\pi}{R}$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt = 0$. On en déduit que pour tout $r > 0$, l'intégrale $\int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge en $+\infty$ et que

$$\forall r > 0, \int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt.$$

• Etudions maintenant $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt$. Soit $F : [0, +\infty[\times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(r, t) \mapsto e^{-r \sin t} \cos(r \cos t)$$

- Pour tout réel $r \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto F(r, t)$ est continue par morceaux sur $[0, \pi]$.
- Pour tout réel $t \in [0, \pi]$, la fonction $r \mapsto F(r, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $(r, t) \in [0, +\infty[\times [0, \pi]$, $|F(r, t)| \leq 1 = \varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0, \pi]$.

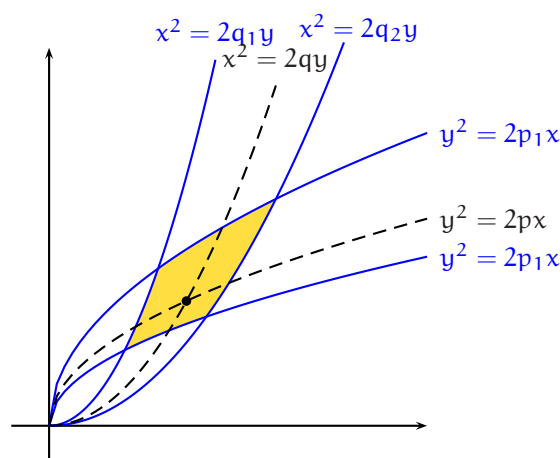
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $r \mapsto \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt$ est continue sur $[0, +\infty[$. On en déduit que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt = \int_0^\pi e^0 \cos(0) dt = \pi,$$

et finalement que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

n° 5 :



L'aire du domaine considéré $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leq x^2 \leq 2q_1x\}$ est

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy.$$

Pour $(x, y) \in D^2$, posons $p = \frac{y^2}{2x}$ et $q = \frac{x^2}{2y}$ ou encore considérons l'application $\varphi : D \rightarrow [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$ et

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{y^2}{2x}, \frac{x^2}{2y} \right)$$

vérifions que φ est un C^1 -difféomorphisme.

- Pour chaque $(x, y) \in D^2$, on $2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x$ et $2q_1y \leq x^2 \leq 2q_2y$ ou encore $p_1 \leq \frac{y^2}{2x} \leq p_2$ et $q_1 \leq \frac{x^2}{2y} \leq q_2$. Donc φ est bien une application.

- Soit $(p, q) \in [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$. Pour $(x, y) \in]0, +\infty[^2$,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2x} = p \\ \frac{x^2}{2y} = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2q} \\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{8pq^2} \\ y = \sqrt[3]{8p^2q} \end{cases}$$

Donc, l'équation $\varphi(x, y) = (p, q)$ a exactement une solution (x_0, y_0) dans $]0, +\infty[^2$. De plus, puisque $\frac{y_0^2}{2x_0} = p \in [p_1, p_2]$ et $\frac{x_0^2}{2y_0} = q \in [q_1, q_2]$, on a $2p_1x_0 \leq y_0^2 \leq 2p_2x_0$ et $2q_1y_0 \leq x_0^2 \leq 2q_2y_0$ et donc $(x_0, y_0) \in D^2$. Donc φ est une bijection.

- φ est de classe C^1 sur D et pour $(x, y) \in D^2$,

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = J(\varphi)(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x^2} \\ \frac{x}{y} & -\frac{1}{2y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ainsi, φ est une bijection de D sur $[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$, de classe C^1 sur D et son jacobien ne s'annule pas sur D . On sait alors que φ est un C^1 -difféomorphisme de D sur $[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$.

Posons alors $(p, q) = \varphi(x, y)$ dans $\iint_D dx dy$. On obtient

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy = \iint_{[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]} \left| \frac{D(x, y)}{D(p, q)} \right| dp dq = \frac{4}{3} \iint_{[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]} dp dq = \frac{4}{3} (p_2 - p_1)(q_2 - q_1).$$

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3} (p_2 - p_1)(q_2 - q_1).$$

n° 6 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \geq 0$, posons $B_n(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$ et notons $V_n(R)$ le volume de $B_n(R)$. Par définition,

$$V_n(R) = \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n.$$

En posant $x_1 = Ry_1, \dots, x_n = Ry_n$, on a $\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = R^n$ (quand $R > 0$) puis

$$V_n(R) = \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n = R^n \int \dots \int_{y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq 1} dy_1 \dots dy_n = R^n V_n(1).$$

ce qui reste vrai quand $R = 0$. Pour $n \geq 2$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 \left(\int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n = \int_{-1}^1 V_{n-1} \left(\sqrt{1 - x_n^2} \right) dx_n \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} V_{n-1}(1) dx_n = I_n V_{n-1}(1) \end{aligned}$$

où $I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2} dx$. Pour calculer I_n , on pose $x = \cos \theta$. On obtient

$$I_n = \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{(n-1)/2} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = 2W_n \text{ (intégrales de WALLIS).}$$

Finalement,

$$V_1(1) = 2 \text{ et } \forall n \geq 2, V_n(1) = 2W_n V_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour $n \geq 2$,

$$V_n(1) = (2W_n)(2W_{n-1}) \dots (2W_2)V_1(1) = 2^n \prod_{k=2}^n W_k = 2^n \prod_{k=1}^n W_k,$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$. Maintenant, il est bien connu que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et plus précisément que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$. Donc, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{2p}(1) = 2^{2p} \prod_{k=1}^{2p} W_k = 2^{2p} \prod_{k=1}^p (W_{2k-1}W_{2k}) = 2^{2p} \prod_{k=1}^p \frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$\begin{aligned} V_{2p+1}(1) &= 2^{2p+1} \prod_{k=2}^{2p+1} W_k = 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p (W_{2k}W_{2k+1}) = 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p \frac{\pi}{2(2k+1)} \\ &= \frac{\pi^p 2^{2p+1}}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} (2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2}{(2p+1)!} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p!}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall R > 0, V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!} \text{ et } V_{2p-1}(R) = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p! R^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

En particulier, $V_1(R) = 2R$, $V_2(R) = \pi R^2$ et $V_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

n° 7 : 1ère solution. $V = \iiint_{x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz \leq 1} dx dy dz$. Or $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. On pose donc $u = x + \frac{z}{2}$, $v = \frac{y}{\sqrt{2}}$ et $w = \frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = 2$ puis que

$$V = \iiint_{x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz \leq 1} dx dy dz = \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw = 2 \times \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

2ème solution. Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ est $\frac{4}{3}\pi abc$.

La matrice de la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}. \text{ On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives } \lambda = \frac{1}{a^2}, \mu = \frac{1}{b^2} \text{ et } \nu = \frac{1}{c^2} \text{ puis}$$

qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$. Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$V = \frac{8\pi}{3}.$$

n° 8 : Supposons tout d'abord que le support de l'arc γ est de longueur $L = 2\pi$. Puisque γ est un arc de classe C^1 régulier, on peut choisir pour γ une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe C^1 $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, telle que $\forall t \in [0, 2\pi]$, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$. L'arc étant fermé, on a de plus $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$. Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions x et y en des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux et 2π -périodiques.

Puisque les fonctions x' et y' sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, la formule de PARSEVAL permet d'écrire

$$\begin{aligned} L = 2\pi &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \int_0^{2\pi} (x'^2(t) + y'^2(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t) \, dt + \int_0^{2\pi} y'^2(t) \, dt \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2(x')}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x')) + \frac{a_0^2(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) \\ &= \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x') + a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) \quad (a_0(x') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x'(t) \, dt = \frac{1}{\pi} (x(2\pi) - x(0)) = 0 = a_0(y')) \\ &\quad \pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2(x) + b_n^2(x) + a_n^2(y) + b_n^2(y)) \right). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de GREEN-RIEMANN

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t) \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} ((x(t) + y'(t))^2 - (x(t) - y'(t))^2) \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_0^2(x + y')}{2} - \frac{a_0^2(x - y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x + y') - a_n^2(x - y') + b_n^2(x + y') - b_n^2(x - y')) \right) \\ &= \pi \left(\frac{a_0(x) a_0(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x) a_n(y') + b_n(x) b_n(y')) \right) \quad (\text{par linéarité des coefficients de FOURIER}) \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n(x) b_n(y) - b_n(x) a_n(y)) \\ &\leq \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) = \frac{\mathcal{L}}{2} \times \frac{\mathcal{L}}{\pi} = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour $n \geq 1$,

$$n(a_n(x)b_n(y) - b_n(x)a_n(y)) \leq n \times \frac{1}{2}(a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) \leq \frac{n^2}{2}(a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)),$$

sont des égalités. En particulier, pour $n \geq 2$, on a $a_n(x) = a_n(y) = b_n(x) = b_n(y) = 0$. D'autre part, quand $n = 1$, $a_1(x)b_1(y) - b_1(x)a_1(y) = \frac{1}{2}(a_1^2(x) + b_1^2(y) + b_1^2(x) + a_1^2(y))$ impose $(a_1(x) - b_1(y))^2 + (b_1(x) + a_1(y))^2 = 0$ et donc $a_1(y) = -b_1(x)$ et $b_1(y) = a_1(x)$.

D'après le théorème de DIRICHLET, en posant $\alpha = \frac{a_0(x)}{2}$, $\beta = \frac{a_0(y)}{2}$, $a = a_1(x)$ et $b = b_1(x)$,

$$\forall t \in [0, 2\pi], \begin{cases} x(t) = \alpha + a \cos t + b \sin t = \alpha + \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - t_0) \\ y(t) = \beta - b \cos t + a \sin t = \beta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - t_0) \end{cases}$$

où $\cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Le support de l'arc γ est donc un cercle. La réciproque est claire.

L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où $L = 2\pi$ et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc γ est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe C est un réel strictement positif $\mathcal{L}$ quelconque, l'homothétie (C') de (C) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{2\pi}{\mathcal{L}}$ a une longueur $\mathcal{L}'$ égale à 2π et délimite une aire $\mathcal{A}' = \left(\frac{2\pi}{\mathcal{L}}\right) \times \mathcal{A}$.

L'inégalité $\mathcal{A}' \leq \frac{\mathcal{L}'^2}{2\pi} = 2\pi$ s'écrit encore $\mathcal{A} \leq 2\pi \times \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi^2} = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$. De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe (C) est un cercle (dans ce cas, $\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2 = \mathcal{A}$).

$$\mathcal{A} \leq \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} \text{ avec égalité si et seulement si la courbe } (C) \text{ est un cercle.}$$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

n° 9 : On pose déjà $u = xa$ et $v = yb$ de sorte que $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = ab$. On obtient

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (x^2 - y^2) \, dx dy = ab \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} (a^2 u^2 - b^2 v^2) \, du dv.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} u^2 \, du dv &= \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} v^2 \, du dv = \frac{1}{2} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} (u^2 + v^2) \, du dv = \frac{1}{2} \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \times r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

et donc

$$I = \frac{\pi ab(a^2 - b^2)}{4}.$$