

Rappel.

$$A \in M_n(K)$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

S_n : l'ensemble des permutations
bijections.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

$$\rightarrow L_i \leftarrow \cancel{L_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ji} L_j$$

$\rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$\rightarrow$ Si A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com } A$$

avec $\text{Com } A = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

Exp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} +2 & -0 & +0 \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C.$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \det A_i$$

$$\rightarrow \det \begin{pmatrix} I & \\ & A \end{pmatrix} = \det A$$

Exercice 1

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

1) On développe selon la 1^{re} colonne

$$D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$
 *) On a. $D_{n+2} - 3D_{n+1} + 2D_n = 0$
 $E_c: nr^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$
 $\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tq. } D_n = \alpha + \beta 2^n$
 $D_1 = 3 \text{ et } D_2 = 7 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2$
 $\Rightarrow D_n = -1 + 2^{n+1}$

Rappel.

$$aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0 \quad a \neq 0$$

$$E_c: ar^2 + br + c = 0$$

$$\rightarrow \text{si } \Delta > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$$

$$U_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \text{si } \Delta = 0 \Rightarrow r_0: \text{racine double}$$

$$U_n = (\alpha n + \beta) r_0^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \text{si } \Delta < 0: \quad r_1 = re^{i\theta} \text{ et } r_2 = re^{-i\theta}$$

$$U_n = r^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice 2:

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$\forall \alpha \exists \delta > 0; \forall \varepsilon \in \mathbb{C} \text{ tq } 0 < |\varepsilon| < \delta$
 on a : $A + \varepsilon I_n$ inversible.

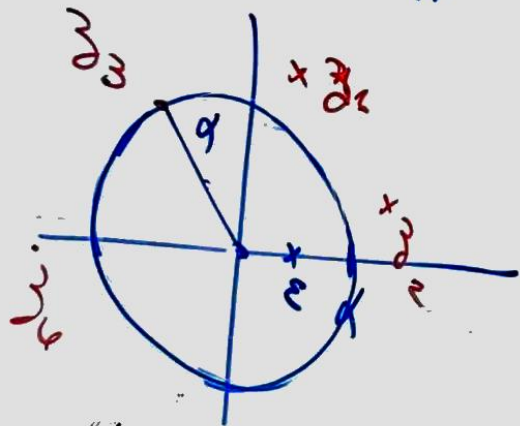
①.

$$\det(A + \varepsilon I_n) \neq 0$$

②.

$P(\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow$
 ε n'est pas racine de P

$$\text{avec } P(X) = \det(A + X I_n).$$



On a $\deg P = n$, alors P admet au plus
 n racines

Soit $I = \{ |z| \text{ tq } z \text{ est une racine de } P, \text{ et } z \neq 0 \}$

* Si 0 est la seule racine de P ($I = \emptyset$)
 $\Rightarrow \exists \alpha > 0$ (vrai $\forall \alpha > 0$) tq.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{C}; 0 < |\varepsilon| < \alpha \Rightarrow \varepsilon$ n'est pas racine de P
 $\Rightarrow P(\varepsilon) \neq 0$

* Si 0 n'est pas la seule racine de $P \Rightarrow I \neq \emptyset$
 et I contient un nombre fini d'éléments

$\Rightarrow \exists \alpha = \min I = \min \{ |z| \text{ tq } z \text{ racine de } P, \text{ et } z \neq 0 \}$
 et $\forall \varepsilon \in \mathbb{C} \text{ tq } 0 < |\varepsilon| < \alpha \Rightarrow \varepsilon$ n'est pas racine de P
 $\Leftrightarrow P(\varepsilon) \neq 0$

Consequence.

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}) : \exists p_0 \in \mathbb{N} \forall p \geq p_0$

$$A + \frac{i}{p} R \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \exists p_0 \in \mathbb{N} \forall p \geq p_0 : \frac{1}{p} < \alpha$$

Ex 3. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$\nexists A, B$ semblable dans $M_n(\mathbb{C})$

$$\Leftrightarrow \nexists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } A = P^{-1} B P$$

$$\Leftrightarrow P = \Phi + iR \text{ avec } \Phi, R \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{ona. } PA = BQ$$

$$(\Phi + iR)A = B(\Phi + iR)$$

$$\begin{cases} \Phi A = B \Phi \\ R A = B R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{soit } H(X) = \det(\Phi + X \cdot R) \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$$

$$\text{ona. } H(i) = \det(\Phi + iR) = \det P \neq 0$$

Donc $H \neq 0$.

$$3) \text{ona. } H \in \mathbb{R}[X] \text{ et } H \neq 0.$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t. } H(\alpha) \neq 0$$

$$\Downarrow \det(\Phi + \alpha R) \neq 0$$
$$\Rightarrow \exists P' \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ avec } P' = \Phi + \alpha R.$$
$$\text{D'apr\u00e8s 1/} \begin{cases} \Phi A = B \Phi \\ R A = B R \end{cases}$$

$$(\varphi + dR) A = B(\varphi + dR)$$

$$P' A = B P'$$

$$\Leftrightarrow A = P'^{-1} B P'$$

Rappel..

$$H \in \mathbb{R}[x]; H(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$H = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; H(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}; a_k = 0$$

$$\Leftrightarrow H \text{ admet un nombre de racines } > n.$$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{H^{(k)}(0)}{k!} = 0, \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

Exercice 5:

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$$

$$C_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ & 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

1) On développe par rapport à 1^{er} ligne:

$$C_p = (-a_0)(-1)^{n+1} \det I_{n-1}$$

$$= (-1)^n a_0$$

$\Rightarrow C_p$ est inversible $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$
 $\stackrel{P(0)}{=}$

$$e) \text{Pg. } \det(XI_n - C_p) = P(X)$$

$$\begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & a_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & X & a_{n-1} \\ 0 & & & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\text{Ex } n=3$$

$$\begin{vmatrix} X & 0 & a_0 \\ -1 & X & a_1 \\ 0 & 1 & X+a_2 \end{vmatrix} = ??$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + X L_2 + X^2 L_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 + a_1 X + X^2(X+a_2) \\ -1 & X & a_1 \\ 0 & 1 & X+a_2 \end{vmatrix} \stackrel{P(X)}{=}$$

on développe selon la 1^{ère} ligne
 $= P(x).$

Dans le cas général

$$L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + x^2L_3 + \dots + x^{n-1}L_n$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & P(x) \\ -1 & x & \dots & -1 & x + a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & x & \dots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

on développe / a 1^{ère} ligne
 $= (-1)^{n+1} P(x).$

$$= P(x)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & x & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

3) $f \in \mathcal{L}(E)$ $\nabla x_0 \neq 0 \in E$.
 $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E .

$f: E \rightarrow F$ linéaire

$B_E = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

$B_F = (v_1, \dots, v_p)$ " de F .

$$\text{Mat}(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{p,n}(K)$$

$$\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} f(x_0) & f^2(x_0) & \dots & f^{n-1}(x_0) & f^n(x_0) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \\ f^2(x_0) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x_0) \end{matrix}$$

$$f^n(x_0) \in E \Rightarrow \exists b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in K$$

$$\text{q} f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k(x_0)$$

b) f automorphisme $\Leftrightarrow \text{Mat}(f, B)$ inversible $\Leftrightarrow b_0 \neq 0$ (d'après 1).

Exercice

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} 1 \\ a_i + b_k \end{pmatrix}_{1 \leq i, k \leq n}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$1) i \neq i_2 : \text{q} a_{i_1} = a_{i_2}$$

$$\Rightarrow L_{i_1} = L_{i_2} \Rightarrow \Delta_n = 0$$

$$2) R(x) = \frac{\prod_{j=1}^n (x - b_j)}{\prod_{j=1}^n (x + a_j)} = \frac{P(x)}{\Phi(x)}$$

ona. $\left. \begin{array}{l} \deg P < \deg \Phi \\ \text{les racines de } \Phi \text{ sont simples} \\ b_j \text{ n'est pas racine de } \Phi \\ \text{car } a_i + b_j \neq 0 \end{array} \right\}$

Donc $\exists d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ tel.

$$R(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{x + a_k}$$

$$d_k = (x + a_k) R(x) \Big|_{x = -a_k}$$

$$= \frac{\prod_{j=1, j \neq k}^{n-1} (-a_k - b_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (-a_k + a_j)}$$

$$\Rightarrow d_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (a_k - a_j)}$$

$$\textcircled{3} d_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{d_1}{a_1+b_1} & \frac{d_1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{d_1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d_{n-1}}{a_{n-1}+b_1} & \frac{d_{n-1}}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{d_{n-1}}{a_{n-1}+b_n} \end{vmatrix}$$

$$L_n \leftarrow L_n + d_1 \cdot L_1 + \dots + d_{n-1} \cdot L_{n-1}$$

$$\Rightarrow d_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

4) on développe selon la dernière ligne

$$\Rightarrow d_n \Delta_n = R(b_n) \cdot \Delta_{n-1}$$

$$\Rightarrow \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{-a_1b_2 - b_1a_2 + a_2b_2 + a_1b_1}{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_i + b_j)} = \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{1.}$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_i + b_j)}$$

Par récurrence

Pour $n=2$ le résultat est vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, supposons le résultat est vrai à l'ordre n et montrons pour $n+1$.

ona.

$$\Delta_{n+1} = \frac{R(b_{n+1})}{a_{n+1}} \cdot \Delta_n$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n (b_{n+1} - b_i)}{\prod_{j=1}^n (b_{n+1} + a_j)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (a_{n+1} - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_{n+1} + b_j)} \cdot x$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i + b_j)}$$

$$(S): \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow AX = b$$

$$(S) \text{ de Cramer} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Si (S) est de Cramer

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

def A

$$X_A(X) = P_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Pq. X_A est unitaire et de degré n .

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad B = XI_n - A$$

$$\Downarrow$$

$$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

avec $b_{ij} = X \delta_{ij} - a_{ij}$

$$P_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i), i}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \text{id}}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i), i} + \prod_{i=1}^n b_{i, i}$$

$$P_A(X) = \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \text{id}}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i), i}}_{\Phi(X)} + \underbrace{\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})}_{R(X)}$$

$$\forall \sigma \neq \text{id} \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \sigma(i) \neq i$$

$$\downarrow$$

$$b_{\sigma(i), i} = -a_{\sigma(i), i}$$

$$\Rightarrow \deg \left(\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i), i} \right) \leq n-1$$

$$\Rightarrow \deg \Phi \leq n-1$$

De plus $\deg R = n$
et R est unitaire

Donc $\deg P = n$ et P est unitaire

$$\rightarrow A \in M_n(\mathbb{K})$$

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$$

Effet:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n \simeq M_n(\mathbb{K})$
canonique associé à A .

$$\Leftrightarrow A = \text{Mat}(f, B_C)$$

$$f: K^n \longrightarrow K^n$$
$$x \mapsto f(x) = AX.$$

$$\text{Dann } \ker f = \ker A = \{0\}.$$

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ bijective. (da } K^n \text{)}.$$

$$\Leftrightarrow \text{Mat}(f, B_C) = A \text{ invertierbar.}$$

Problème

1) a et b)

$$\lambda \text{ v.p. de } A \Leftrightarrow \exists X_0 \neq 0_{n,1} \text{ tel } AX_0 = \lambda X_0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) X_0 = 0 \text{ et } X_0 \neq 0_{n,1}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$$

$$\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}$$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \text{ racine de } P_A$$

$$c) A \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow P_A(x) \in \mathbb{C}[x]$$

$\Rightarrow P_A$ admet au moins une racine complexe $\Rightarrow S_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow P_A(x) \in \mathbb{R}[x]$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ S_{\mathbb{C}}(A) \quad S_{\mathbb{R}}(A) \end{array}$$

Ex: $\pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P_{\pi}(x) = x^2 + 1$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ S_{\mathbb{C}}(\pi) = \{i, -i\} \quad S_{\mathbb{R}}(\pi) = \emptyset \end{array}$$

2) A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ racine de $P_A \Leftrightarrow$ racine de P_B
 $\Leftrightarrow \det(-A) \neq 0$
 $P_A(0) \neq 0$
 $\Rightarrow P_A$ est pas VP de $-A$.

Donc $S_{\mathbb{R}}(A) = S_{\mathbb{R}}(B)$

4) $\Pi = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3) A et B sont semblables
 $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(XI_n - B) \\ &= \det(XI_n - P^{-1}AP) \\ &= \det P^{-1} (XI_n - A) P \\ &= \det P^{-1} \det(XI_n - A) \det P \\ &= P_A(X) \end{aligned}$$

2) $P_{\Pi}(X) = \det(XI_3 - \Pi)$
 $= -\det(\Pi - XI_3)$
 $= - \begin{vmatrix} -3-X & 2 & 1 \\ 2 & -X & 2 \\ 1 & 2 & -3-X \end{vmatrix}$
 $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$
 $= - \begin{vmatrix} -6-X & 2 & 1 \\ 0 & -X & 2 \\ X+4 & 2 & -X-2 \end{vmatrix}$

$$= (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -x & 2 \\ -1 & 2 & -x-3 \end{vmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -x & 2 \\ 0 & 4 & -x-6 \end{vmatrix}$$

$$= (x+4) (x^2 + 2x - 8)$$

$$P_N = (x+4)^2 (x-2)$$

b) on déduit $S_p(\pi) = \{2, -4\}$

c) $0 \notin S_p(\pi) \Rightarrow \pi$ est inversible

$$P_\pi(0) = \det(0 - \pi) = -\det \pi$$

$$\stackrel{||}{-3e} \Rightarrow \det \pi = 3e$$

$$5) N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\operatorname{rg} N = 1$. Car $C_1 = C_2 = C_3 \neq 0$

$\operatorname{rg} N = 1 \neq 3 \Rightarrow N$ n'est pas inversible
 $\Rightarrow$ 0 est v.p. de N

$$P_N(x) = - \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$= - \begin{vmatrix} 3-x & 3-x & 3-x \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P_N(x) = x^2 (x-3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$6) a) A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \det(xI_n - A) \\ = \begin{vmatrix} xI_k - B & -C \\ 0 & xI_p - D \end{vmatrix}$$

$$= \det(xI_k - B) \cdot \det(xI_p - D)$$

$$P_A(x) = P_B(x) \cdot P_D(x)$$

$$b) \text{ si } d \in S_P(B) \Rightarrow P_B(d) = 0 \\ \Rightarrow P_A(d) = 0 \Rightarrow d \in S_P(A) \\ \Rightarrow S_P(B) \subset S_P(A)$$

Partie II ($K = \mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$)

$$P_u(x) = \det(xI_n - \text{Mat}(u, B))$$

Soit B' base de E

$$\text{Pg. } \det(xI_n - \text{Mat}(u, B)) = \det(xI_n - \text{Mat}(u, B'))$$

$$\text{On a } \text{Mat}(u, B) = \underbrace{P_{B \rightarrow B'}}_{P} \text{Mat}(u, B') \cdot P_{B' \rightarrow B}$$

$$\text{Mat}(u, B) = P \text{Mat}(u, B') P^{-1}$$

$$\text{D'après I-3 } \det(xI_n - \text{Mat}(u, B)) = \det(xI_n - \text{Mat}(u, B'))$$

2) F est stable par $U \iff U(F) \subset F$
 $\Downarrow$
 $\forall x \in F \Rightarrow Ux \in F$

on définit $U_F: F \rightarrow F$
 $x \mapsto U_F(x) = U(x)$

l'endomorphisme par U sur F .

3) $E = F \oplus G$. $\dim E = n$

a) i) F stable par U .

$B_F = (e_1, \dots, e_p)$ base de F ($p \leq n$)

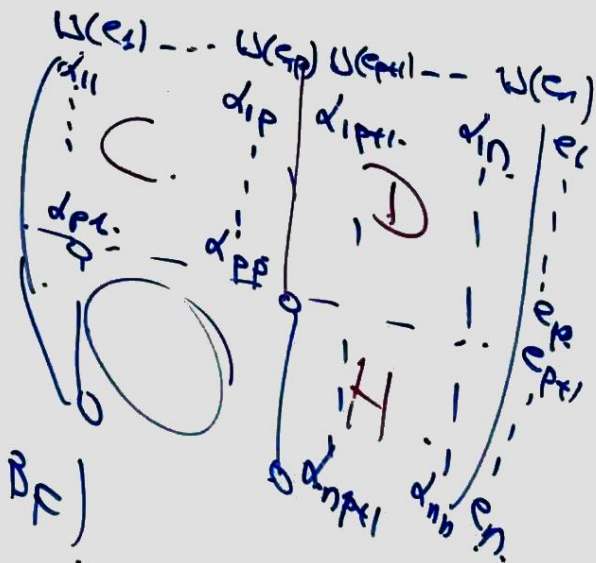
$B_G = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ " de G .

$\Rightarrow B' = B_F \cup B_G = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

F stable par $U \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}: e_k \in F$
 $\Rightarrow U(e_k) \in F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$
 $U(e_k) = \sum_{i=1}^p d_{ik} e_i$

$\forall k \in \{p+1, \dots, n\}: e_k \in G \Rightarrow U(e_k) \in G$
 $\text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$

$\text{Mat}(U, B') =$



on note.

$C = \text{Mat}(U_F, B_F)$

ii) D'après I-6

$$Sp_{\mathbb{F}}(C) \subset Sp_{\mathbb{F}}(A)$$

$$\parallel$$

$$Sp_{\mathbb{F}}(U_F) \subset Sp_{\mathbb{F}}(U)$$

b) i) $\exists B''$ base de E .

$$Mat(U, B'') = \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

$$P_U(X) = P_C(X) \cdot P_H(X)$$

$$C = Mat(U_F, B_F)$$

$$H = Mat(U_G, B_G)$$

$$\Rightarrow P_U(X) = P_{U_F}(X) \cdot P_{U_G}(X)$$

$$\forall p \in U \Leftrightarrow P_U(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_{U_F}(p) = 0 \text{ ou } P_{U_G}(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in Sp_{\mathbb{F}}(U_F) \text{ ou } \exists \lambda \in Sp_{\mathbb{F}}(U_G)$$

$$\Rightarrow \underline{Sp_{\mathbb{F}}(U) = Sp_{\mathbb{F}}(U_F) \cup Sp_{\mathbb{F}}(U_G)}$$

Rappel. "hyperplan"

Def: H un s.o. de E .

H est un hyperplan $\Leftrightarrow$

$\exists \varphi: E \rightarrow K$ forme linéaire non nulle.

$\Leftrightarrow H = \ker \varphi$.

$\Leftrightarrow \exists a \notin H$ $\Leftrightarrow E = H \oplus \text{vect}\{a\}$.

$\dim E \leq \infty$

H hyperplan

$\Leftrightarrow \dim H = \dim E - 1$.

Th 1 Soit $H_1, \dots, H_p$ p -hyperplan
 $\perp E$
Alors $\dim\left(\bigcap_{k=1}^p H_k\right) \geq \dim E - p$

Th 2 $\dim E$.

Si $\dim H = n - p$.

Alors $\exists H_1, \dots, H_p$ hyperplans

$\Leftrightarrow H = \bigcap_{k=1}^p H_k$.

Exercice 2.

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Pq A est inversible $\Leftrightarrow$ Pq $\ker A = \{0_n\}$

Supposons que $\ker A \neq \{0_n\}$.

$$\Leftrightarrow \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ s.t. } X \in \ker A \Rightarrow AX = 0_{n,1}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}; (AX)_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$$

$$0 = a_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$$

$$a_{ii} x_i = - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow S_F(\cdot, U) = S_F(U, F) \cup S_F(\cdot, TG)$$

$$\Rightarrow |a_{ii} x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \quad \forall i$$

sach, $|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

$$\text{car } X \neq 0_n$$

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|}$$

$$\Rightarrow |a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ce qui est absurde.

Exercice 4: "Polynômes de Lagrange"

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

$$a) \deg L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \deg \left(\frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

$$\deg L_i = n - 1$$

$$\text{* coef. dom. } L_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$$

$$b) \forall j \in \{1, \dots, n\}; a_j \text{ racine de } L_i$$

$$\Rightarrow L_i(a_j) = 0$$

$$\bullet L_i(a_i) = 1$$

$$\Rightarrow L_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$c) \text{ Card } B = n = \dim R_{n-1}[X]$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}; L_i \in R_{n-1}[X]$$

$$\text{soit } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i = 0 \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(a_j) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow B = (L_1, \dots, L_n) \text{ est libre}$$

$$\text{Alors } B \text{ base de } R_{n-1}[X]$$

$$d) \text{ soit } P \in R_{n-1}[X] \text{ et } B \text{ base de } R_{n-1}[X]$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i(x)$$

$$\Rightarrow p(a_j) = \sum_{i=1}^n d_i L_i(a_j) = d_j$$

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{i=1}^n p(a_i) L_i(x)$$

2) $\exists ! \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tq } \varphi(a_i) = a_i$
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Existence

soit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i L_i(x) \Rightarrow \varphi(a_j) = a_j$
 $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

unicité:

supp $\exists H \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tq } H(a_i) = a_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow (H - \varphi)(a_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow H - \varphi \text{ admet } n \text{ racines et } \deg H - \varphi \leq n-1$$

$$H - \varphi = 0 \Rightarrow H = \varphi$$



Remarque $\rightarrow$

$\exists \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tq } \varphi(a_i) = \lambda_i$
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Réponse

soit $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n d_i L_i(x)$

avec L_i : polynôme de Lagrange

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

Puisque $L_i(a_j) = \delta_{ij}$

Alors $\varphi(a_j) = d_j$

Def. Soit $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \varphi \text{ isomorphe } P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$$

$\rightarrow$ soit $U = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \exists ! \varphi \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } \varphi(\varphi) = U$$

$$\varphi(a_i) = d_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

3) on effectue la division euclidienne de
par $\prod_{i=1}^n (x - a_i) \Rightarrow \exists B \in \mathbb{R}[X]$
 $\exists R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$A(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) B(x) + R(x)$$

$$\text{or } R(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \Rightarrow R(x) = \sum_{i=1}^n R(a_i) L_i(x)$$

$$\text{donc } A(a_i) = R(a_i)$$

$$\Rightarrow A(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) B(x) + \sum_{i=1}^n A(a_i) L_i(x)$$

4) a) $\deg x^n = \deg \prod_{i=1}^n (x - a_i)$

et les poly sont unitaires $\Rightarrow B(x) = 1$

$$\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0) = - \prod_{i=1}^n (-a_i)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i$$

c) d'après b) pour $a_i = i$

$$\sum_{i=1}^n i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n i$$

$$= (-1)^{n+1} n!$$

$$\text{or } L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - j)}{i - j}$$

$$\Rightarrow L_i(0) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{-j}{i - j} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{j}{j - i}$$

$$= \frac{n!}{i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (j - i)}$$

$$= \frac{n!}{i (1-i)(2-i) \dots (n-i)}$$

$$= \frac{n!}{(-1)^{n-i} i! (n-i)!} = (-1)^i \binom{n}{i} i^n$$

Rappel: "rang d'une app linéaire"

$f: E \rightarrow F$ linéaire

$\dim E = n$; $\dim F = p$, $B = (e_1, \dots, e_n)$
base de E .

$\rightarrow \text{rg}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{Im } f)$
 $= \dim(\text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)))$
 $= \text{nombre de vecteurs libre maximal}$
de la famille

$$\Rightarrow \text{rg}(f) \leq \min(n, p)$$

$\rightarrow$ Th du rang:

$$\dim E = \dim \ker f + \underbrace{\dim \text{Im } f}_{\text{rg}(f)}$$

$\rightarrow$ f injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E$

$\rightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim F$.

Th 1 soit $g: F \rightarrow G$ isomorphisme.

Alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$

Effet sur $\ker f = \ker(g \circ f)$

car $\ker f \subset \ker g \circ f$ (toujours)

" $\supset$ " soit $x \in \ker g \circ f \Rightarrow g(f(x)) = 0$

$\Rightarrow f(x) \in \ker g = \{0\} \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f$

Th du rang

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \ker f + \dim \text{Im } f \\ \dim E &= \dim \ker(g \circ f) + \dim \text{Im } g \circ f \end{aligned}$$

The map $h: H \rightarrow E$ is isomorphic.

$$\text{Also } \text{rg } f = \text{rg}(f \circ h).$$

Effect on: $\text{Im } f = \text{Im}(f \circ h)$

ca $\text{Im}(f \circ h) \subset \text{Im } f$.

" $\supset$ " soit $y \in \text{Im } f \Rightarrow \exists x \in E$ tq
 $y = f(x)$.

$x \in E$ et h bij $\Rightarrow \exists x' \in H$ tq $x = h(x')$
 $\Rightarrow y = f \circ h(x') \Rightarrow y \in \text{Im}(f \circ h)$.

on déduit. $\text{rg}(f \circ h) = \text{rg}(f)$

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}(f, B_E, B_F))$$

= nombre maximal de vecteurs
colonnes libre

$$A \in \Pi_{n,p}(K).$$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f) \text{ avec}$$

$$f: K^p \rightarrow K^n$$

$$X \mapsto AX$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq \min(n, p)$$

$$\xrightarrow{Th_1} \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(P \cdot A); \forall P \in GL_n(K)$$

$$\xrightarrow{Th_2} \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \cdot Q); \forall Q \in GL_p(K)$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{rg}(P \cdot A \cdot Q) = \operatorname{rg}(A), \forall P \in GL_n(K), \forall Q \in GL_p(K)}$$

Th soit $A \in \Pi_{n,p}(K)$ & $0 < \operatorname{rg}(A) = r \leq \min(n, p)$

Alors $\exists P \in GL_n(K); \exists Q \in GL_p(K)$

$$\& P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} \circ \end{array} \end{array} \end{pmatrix} = J_{n,p,r}$$

Conséquences

Soit $A, B \in \Pi_{n,p}(K)$

$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) \iff A \text{ et } B \text{ sont équivalents}$

Effet

$\xrightarrow{Th_1} \text{hyp } \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = r$
 $\& P_1, P_2 \in GL_n(K)$
 $\& Q_1, Q_2 \in GL_p(K)$

$$L_1. P_1 A Q_1 = J_{n.p.r.}$$

$$P_2 B Q_2 = J_{n.p.r.}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{P_1^{-1} P_2}_{P} B \underbrace{Q_2 Q_1^{-1}}_Q$$

→ Opérations conservant le rang:

$$L_i \leftarrow \alpha_i L_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j L_j \quad (\alpha_i \neq 0)$$

$$C_i \leftarrow \alpha_i C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j C_j \quad (\alpha_i \neq 0)$$

$$\rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(tA) \in (Th)$$

$$\text{rg}(A) = n_p \Leftrightarrow A \text{ inversible.}$$

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}(f, B_E, B_F))$$

= nombre maximal de vecteurs
colonnes libres

Problème "Autour du rang"

Donnée: $U: F \rightarrow G$ linéaire

dim $F = p$ et dim $G = m$.

rg $U = r$.

1) On a $\ker U$ est un s.c.v. de F $\Rightarrow$
dim $F < \infty$

$\exists F_1$ s.c.v. de F tq.

$$F = \ker U \oplus F_1.$$

b) soit $v: F_1 \rightarrow \text{Im } U$

v est linéaire $x \mapsto v(x) = U(x)$

méthode:

$$\text{On a: } \ker v = \left\{ x \in F_1 \mid v(x) = U(x) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in F_1 \mid x \in \ker U \right\}$$

$$\Rightarrow \ker v = \ker U \cap F_1 = \{0\}$$

$\Rightarrow$ injection

* soit $y \in \text{Im } U \Rightarrow \exists x \in F$ tq $y = U(x)$

$$x \in F = F_1 \oplus \ker U \Rightarrow \exists x_1 \in F_1$$

$$\exists x_2 \in \ker U$$

$$\text{tq } x = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow y = U(x) = U(x_1) + U(x_2)$$

$$y = U(x_1) \text{ et } x_1 \in F_1$$

$\Rightarrow v$ est surjection

$\Rightarrow v$ est bijective

Autrement:

On a: dim $F_1 = \dim F - \dim \ker U$

th.
rang dim $\text{Im } U$

et v injective

$0 \leq r \leq \min(m, p)$
 a) $(e_1, \dots, e_r)$ base de F_1
 $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ base de $\ker U$.

$\Rightarrow B = (e_1, \dots, e_p)$ base de F .

$\forall i \in \{1, \dots, r\}; E_i = U(e_i)$

on a. $(e_1, \dots, e_n)$ base de F_x
 et U isomorphe $\Rightarrow (U(e_1), \dots, U(e_r))$
 base de $\text{Im } U = \pi \cdot U$ de G .

$\Rightarrow (E_1, \dots, E_r)$ est libre dans G .

d'après le th de la base incomplète.

$\exists (E_{r+1}, \dots, E_m)$ une famille libre de G .

$B' = (E_1, \dots, E_r, E_{r+1}, \dots, E_m)$ base de G .

$$\text{Mat}(U, B, B') = \begin{pmatrix} U(e_1) & \dots & U(e_r) & U(e_{r+1}) & \dots & U(e_p) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ E_1 & & & & & E_m \end{pmatrix}$$

$$J_{p, m, r} =$$

$\forall i \in \{1, \dots, r\}; U(e_i) = U(e_i) = E_i$

$\forall i \in \{r+1, \dots, p\}; e_i \in \ker U \Rightarrow U(e_i) = 0$

3) Soit $\pi \in \pi_{mp}(K) \hookrightarrow \pi g(\pi) = \pi$.

Soit $U: K^p \rightarrow K^m$
 $x \mapsto \pi x \Rightarrow \text{Mat}(U, B, B') = \pi$

D'après 2/ $\exists B$ base de K^p
 $\exists B'$ " de K^m

$$\hookrightarrow \text{Mat}(U, B, B') = J_{p, m, r}$$

$$\text{Nat}(U, B_p, B_m) = P_{B_m \rightarrow B'} \cdot \text{Nat}(U, B, B') \cdot P_{B \rightarrow B_p}$$

$$\Pi = S J_{p,m,n} T$$

Partie II Prop 20-22 $\Pi \in \Pi_n(\mathbb{C})$

$$S p_{\mathbb{C}}(\Pi) = \{ d \in \mathbb{C} \mid d I_n - \Pi \text{ n'est pas inv} \}$$

$$R \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$\det(d I_n - \Pi) = 0$$

$$\sigma_R(\Pi) = \{ d \in \mathbb{C}^* \mid d R - \Pi \text{ n'est inversible} \}$$

1) a) $d \in \sigma_R(\Pi) \Leftrightarrow d \in \mathbb{C}^*$ et $d R - \Pi$ n'est pas inv

$\Leftrightarrow d \in \mathbb{C}^*$ et $R(d I_n - R^{-1} \Pi)$ " "

$\Leftrightarrow d \in \mathbb{C}^*$ et $\det(R(d I_n - R^{-1} \Pi)) = 0$

"

" $\det R \cdot \det(d I_n - R^{-1} \Pi) = 0$

"

$\Leftrightarrow d \in \mathbb{C}^*$ et $\det(d I_n - R^{-1} \Pi) = 0$

$$\Rightarrow \sigma_R(\Pi) = \mathbb{C}^* \cap S p_{\mathbb{C}}(R^{-1} \Pi)$$

b) R^{-1} est universelle

$$\Rightarrow \text{rg}(R^{-1} \Pi) = \text{rg}(\Pi)$$

$$2) \text{rg}(\Pi) = r$$

$$\text{Card}(\sigma_R(\Pi)) \leq r$$

$$a) D = \text{diag}(1, e, \dots, r, 0, \dots, 0)$$

$$\text{ona } \text{rg} D = r = \text{rg}(\Pi)$$

$$\Rightarrow \exists P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$\text{t.q. } \Pi = P D Q$$

$$b) d \in \sigma_{PQ}(\Pi) \Leftrightarrow d \in \mathbb{C}^* \text{ et } \det(d P Q - \Pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ et } \det(\lambda P\Phi - P D\Phi) = 0$$

$$\det(P) \cdot \det(\lambda I_n - D) \det\Phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ et } \det(\lambda I_n - D) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - r \end{pmatrix} = 0$$

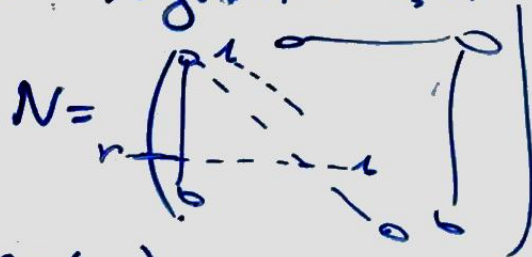
$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ et } \lambda \in \{1, \dots, r, 0\}$$

Donc $\sigma_R(\Pi) = \{1, \dots, r\}$
 $\Rightarrow \text{Card } \sigma_R(\Pi) = r.$

c) l'ensemble $\{ \text{Card } \sigma_R(\Pi); R \in GL_n(\mathbb{F}) \}$
 est majorée par r et non vide.
 $\exists P, \Phi \in GL_n(\mathbb{F})$ tq $\text{Card } \sigma_{P\Phi}(\Pi) = r$

Alors $\{ \text{Card } \sigma_R(\Pi); R \in GL_n(\mathbb{F}) \} = r = \text{rg}(\Pi)$

$$3) \text{ : } \text{rg}(\Pi) = r < n.$$



$$\text{rg}(N) = r = \text{rg}(\Pi).$$

$$\Pi = P' N \Phi'$$

$$\lambda \in \sigma_{P'\Phi'}(\Pi) \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ et } \det(\lambda I_n - N) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ et } \begin{vmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - r \\ & & & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{F}^* \text{ et } \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{P'\Phi'}(\Pi) = \emptyset$$

$$4) \quad \pi \notin GL_n(\mathbb{F}) \Leftrightarrow \min_{\substack{\uparrow \\ \text{rg}(\pi) < n}} \underbrace{\{ \text{card } \sigma_R(\pi); R \in GL_n(\mathbb{F}) \}}_I = 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(\pi) = r < n$$

$$\text{d'après } \exists / \exists R' = P' \cdot \Phi \cdot \text{sq. } \sigma_{R'}(\pi) = \phi$$

$$\text{card}(\sigma_{R'}(\pi)) = 0$$

et comme $I \neq \emptyset$ et minuer pas 0, alors
 $\min I = 0$.

$$\Leftarrow \min I = 0 \Rightarrow \exists R \in GL_n(\mathbb{F}) \text{ sq. } \text{card } \sigma_R(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_R(\pi) = \phi \Leftrightarrow \mathbb{F}^* \cap \text{Sp}_{\mathbb{F}}(R^{-1}\pi) = \emptyset$$

$$\text{Sp}_{\mathbb{F}}(R^{-1}\pi) = \emptyset$$

$$\text{ou } \text{Sp}_{\mathbb{F}}(R^{-1}\pi) = \{0\}$$

$$\Rightarrow 0 \vee p \in R^{-1}\pi$$

$$\Rightarrow R^{-1}\pi \cap \text{neut pas inversible}$$

" "