

Def: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$
 $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$

On développe selon la j -ème colonne

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

ou bien la i -ème ligne.

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

avec

Δ_{ij} est le déterminant obtenu en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne

Si A contient une ligne ou bien une colonne nulle, alors $\det A = 0$

Si A est triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

Alors $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

aussi si A est diagonale

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k$$

$$\det({}^t A) = \det A$$

$\det$ est linéaire ?
 à chaque ligne ou " colonne

Déterminant d'une matrice $A \in M_n(K)$

Si $B = P^{-1}AP$

Alors $\det B = \det A$

Si A est triangulaire par blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{i=1}^n \det A_i$$

A inversible $\Leftrightarrow$

$$\det A \neq 0$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Si A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} ({}^t \text{Com } A)$$

avec $\text{Com } A = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{i,j}$

Opérations conservant le déterminant

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j L_j$$

$$C_i \leftarrow C_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j C_j$$

Si $L_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j L_j$

ou $C_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j C_j$

Alors $\det A = 0$