

Espace vectoriel, application linéaire et Matrice

Dans tout le chapitre $IK = \mathbb{R}$ ou $IK = \mathbb{C}$.

Espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide muni d'une l.c.i notée $(+)$ net d'une l.c.e notée $(.)$.

On dit que E est un IK -espace vectoriel s'il vérifie :

- i) $(E, +)$ est un groupe abélien.
- ii) $\forall \alpha, \beta \in IK$ et $\forall x \in E$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
- iii) $\forall \alpha \in IK$ et $\forall x, y \in E$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- iv) $\forall x \in E$, $1.x = x$.

On notera $(E, +, .)$ un IK -espace vectoriel

Remarque

Si $(E, +, .)$ un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
Mais la réciproque est fausse.

Exemple

- 1) IK^n est un IK -e.v.
- 2) $IK[X]$ est un IK -e.v.
- 3) $M_{n,p}(IK)$ est un IK -e.v.

Sous-espace vectoriel

Soient $(E, +, .)$ un IK -espace vectoriel et $F \subset E$.

On dit que F est un sous espace vectoriel si

$$\begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall \alpha \in IK, \forall x, y \in F, \alpha.x + y \in F \end{cases}$$

Exemple

- 1) $IK_n[X]$ est un s.e.v. de $IK[X]$.
- 2) $S_n IK$ est un s.e.v de $M_n(IK)$.
- 3) L'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est un s.e.v. de l'ensemble de toutes les fonctions $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Proposition

- 1) Si F est un sous espace vectoriel d'un IK -e.v. E , alors F est un IK -e.v.
- 2) Soient F et G deux s.e.v d'un espace vectoriel E , alors $F + G$ est un s.e.v de E .
- 3) Soient F et G deux s.e.v d'un espace vectoriel E , alors $F \cap G$ est un s.e.v de E .
- 4) une intersection quelconque de s.e.v de E est un s.e.v. de E .

$$\bigcap_{i \in I} F_i.$$

Partie génératrice

Soient $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel et A une partie non vide de E . On appelle sous espace vectoriel engendré par A c'est le plus petit sous espace vectoriel contenant A noté $\text{vect}(A)$.

$$\text{vect}(A) = \bigcap_{F \text{ s.e.v. de } E \text{ et } A \subset F} F.$$

$$\text{vect}(A) = \{z \in E ; \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in IK^n, (x_1, \dots, x_n) \in A^n \text{ avec } z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\}.$$

★ Si $A = (e_1, \dots, e_n)$, $z \in \text{vect}(e_1, \dots, e_n) \iff \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in IK^n$ tel que $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

Remarque

- 1) Toute famille contenant l'élément nul est liée.
- 2) Toute famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
- 3) Une sous-famille d'une famille libre est libre.
- 4) Une sur-famille d'une famille liée est liée.

Famille génératrice

Soit $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel.

On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est **génératrice** si $E = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$. $\iff \forall x \in E$, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in IK^n$,

$$\text{tels que } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

Base

- On appelle **base** de E , toute famille à la fois génératrice et libre.
- Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E , alors pour tout $x \in E$,

$$\exists ! (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in IK^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ s'appellent les coordonnées de x dans la base B .

- Toutes les bases de E ont le même cardinal

Dimension

- Un IK -espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice de cardinal fini.
- Dans le cas contraire, on dit que l'espace est de dimension infinie.
- Si la dimension de E est finie, $\dim_{IK} E = \text{card}(B)$ avec B une base quelconque de E .

Exemples

Famille libre, famille génératrice et base

Famille libre

Soit $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel.

★ On dit qu'une famille $A = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E est **libre** si pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in IK^n$, tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$, on a $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

★ On dit qu'une famille infinie $F = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E est **libre** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est libre.

★ Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ qui n'est pas libre sera dite **liée**. c.à.d. il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in IK^n$, non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$ (on peut exprimer un vecteur en fonction des autres.)

1) $\dim_{IK}(IK) = 1$ (1) est une bse de IK .

2) $\dim_{IK}(IK^n) = n$ $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$
avec $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{ème composante}}, 0, \dots, 0)$ est sa la base canonique.

3) $\dim_{IK}(\mathcal{M}_{n,p}(IK)) = np$ la base canonique est $B = (E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$
avec $E_{i,j}$ est la matrice dont tous ses coefficients sont nuls sauf le coefficient i, j est 1.

Théorème

Soient $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel avec $\dim(E) = n$ et B une famille de vecteurs de E tels que $\text{card}(B) = n = \dim(E)$, alors

B est une base de $E \iff B$ est génératrice $\iff B$ est libre.

Propriétés

1) Dans un espace de dimension finie, de toute famille génératrice on peut extraire une base.

2) Soient F et G deux s.e.v. de E .

Si $\begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases}$ alors $F = G$

Théorème de la base incomplète

Soit E un K -ev de dimension finie n , alors

1) Toute famille libre de p vecteurs ($p \leq n$) de E peut être complétée en une base de E .

2) Tout sous-espace F de E admet un supplémentaire dans $E \iff$ il existe G est un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$

Proposition

Soit E un K -ev de dimension finie n et F une famille de vecteurs.

1) De toute famille génératrice on peut extraire une base de E .

2) Si F est une famille libre de E , alors $\text{card}(F) \leq \dim(E)$.

3) Si $\text{card}(F) \geq \dim(E)$, alors F est liée.

4) Si F est une famille génératrice de E , alors $\text{card}(F) \geq \dim(E)$.

Somme directe de deux sous-espaces

Soient $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

• On appelle **somme** de F et G le sous espace vectoriel

$$F + G = \{x + y, \text{ tel que } x \in F, y \in G\}.$$

• On dit F et G sont en **somme direct** si $F \cap G = \{0_E\}$.

• On dit F et G sont **supplémentaires dans** E ou bien E est la somme directe de F et G et on note $E = F \oplus G$ si

$$\begin{cases} E = F + G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Proposition

Soient $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1) $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$

2) $F \cup G \subset F + G$

3) $F + G = \text{vect}(F \cup G)$

4) $E = F \oplus G \iff$

$\forall y \in E, \exists ! x_F \in F \text{ et } x_G \in G \text{ tel que } y = x_F + x_G.$

✿ Proposition

Dimension de E est finie .

Soient F et G deux sev de E , alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G))$$

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

✿ Théorème

Dimension de E est finie .

Soient F et G deux sev de E de bases respectives B_1 et B_2 , alors

$$\left\{ \begin{array}{l} E = F \oplus G \\ \iff \\ F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \\ \iff \\ E = F + G \text{ et } \dim F + \dim G = \dim E \\ \iff \\ B = B_1 \cup B_2 \text{ est une base de } E \end{array} \right.$$

✿ Somme directe de plusieurs sous-espaces

Soit $E_1, \dots, E_n$ n s.e.v. de E , leur somme $E_1 + \dots + E_n$ est le s.e.v de E défini par :

$$E_1 + \dots + E_n = \{v = x_1 + \dots + x_n \text{ où } x_i \in E_i \forall i = 1, \dots, n\}.$$

• On dit que $E_1, \dots, E_n$ sont en somme directe, si $\forall v \in E_1 + \dots + E_n$ il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ tel que $v = x_1 + \dots + x_n$ et on note

$$E_1 + \dots + E_n = E_1 \oplus \dots \oplus E_n.$$

• On dit que $E_1, \dots, E_n$ sont des s.e.v. supplémentaires dans E , si $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. $\iff$

$$\forall y \in E, \exists ! x_i \in E_i \in E_i \text{ tel que } y = \sum_{i=1}^n x_i.$$

✿ Proposition

Soit $E_1, \dots, E_n$ n s.e.v. de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

$$a) E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$$

$\iff$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} E_1 + \dots + E_n = E \\ \text{et} \\ \text{si } (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \text{ tel que} \\ x_1 + \dots + x_n = 0, \text{ alors } x_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right.$$

$\iff$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} E_1 + \dots + E_n = E \\ \text{et} \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, E_k \cap \left(\sum_{i=1, i \neq k}^n E_i \right) = \{0\} \end{array} \right.$$

✿ Théorème

Soient E un IK -e.v de dimension finie, $E_1, E_2, \dots, E_n$ des s.e.v. de E de bases respectives $B_1, B_2, \dots, B_n$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \bigoplus_{i=1}^n E_i \\ \iff \\ E = E_1 + E_2 + \dots + E_n \text{ et } \dim E = \sum_{i=1}^n \dim E_i \\ \iff \\ B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \text{ est un base de } E \end{array} \right.$$

Rang d'une famille de vecteurs

Soient $(E, +, \cdot)$ un IK -espace vectoriel et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de E .

Le **rang** de la famille $(v_1, v_2, \dots, v_p)$, noté $rg(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est la dimension du sous espace vectoriel engendré par $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ c.à.d.

$$rg(v_1, v_2, \dots, v_p) = \dim \text{vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$$

$\iff$

$rg(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est le nombre maximal des vecteurs libres dans cette famille.

Propriétés

- 1) $rg(v_1, v_2, \dots, v_p) \leq \text{card}(v_1, v_2, \dots, v_p) = p$
- 2) $rg(v_1, v_2, \dots, v_p) = p \iff (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est libre.
- 3) Soient A et B deux familles de vecteurs telles que $A \subset B$, alors $rg(A) \leq rg(B)$.
- 4) $\dim(E) = n$ et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteur de E .
 $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une base de $E \iff rg(v_1, v_2, \dots, v_p) = n = p$.

Applications linéaires

Soient E, F deux IK -e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application

- On dit que f est linéaire si

$$\forall x, y \in E \text{ et } \forall \alpha \in IK, f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F .

- $f : E \rightarrow F$ est un **isomorphisme** si f est linéaire et bijective.
- Un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E .
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijective.

On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

- Une **forme linéaire** est une application linéaire de $E \rightarrow IK$.

Définition-Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- Le noyau de f est l'ensemble défini par :

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\}.$$

- L'image de f est l'ensemble $\text{Im} f = f(E) = \{f(x), x \in E\}.$

- $\ker(f)$ est un s.e.v de E et $\text{Im} f$ est un sev de F .

- f est **injective** $\iff \ker(f) = \{0_E\}.$

- f est **surjective** $\iff \text{Im} f = F.$

Projecteur et symétrie

Soient E un IK -espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = F \oplus G$).

- 1) On appelle **projection** sur F parallèlement à G l'application

$$P_F : E = F \oplus G \rightarrow F$$

$$x = x_1 + x_2 \mapsto P_F(x) = x_1$$

- 2) On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application

$$S_F : E = F \oplus G \rightarrow E$$

$$x = x_1 + x_2 \mapsto S_F(x) = x_1 - x_2.$$

Propriétés

Avec les notations précédentes on a :

- 1) les applications P_F et S_F sont linéaires.

- 2) • $P_F \circ P_F = P_F$

$$\bullet \ker(P_F) = G$$

$$\bullet \text{Im} P_F = \ker(P_F - \text{Id}_E) = F.$$

En particulier on a :

$$E = \ker(P_F) \oplus \text{Im}(P_F).$$



- 3) • $S_F \circ S_F = Id_E$.
 • $\ker(S_F - Id_E) = F$
 • $\ker(S_F + Id_E) = G$

En particulier on a :

$$E = \ker(S_F - Id_E) \oplus \ker(S_F + Id_E).$$

- 4) • P_F est une projection si et seulement si $P_F \circ P_F = P_F$.
 • S_E est une symétrie si et seulement si $S_E \circ S_E = Id_E$.
 • $S_E + Id_E = 2P_E$

Applications linéaires en dimension finie.

Dans la suite E un K -e.v de dimension finie.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- i) Déterminer $f \iff$ déterminer $f(e_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
 ii) $f = g \iff f(e_i) = g(e_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n$
 (f et g coïncident en les vecteurs d'une base de E . iii)

$$f = \tilde{0} \iff f(e_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

vi)

$$Im(f) = \text{vect}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}.$$

On en déduit que $\dim(Im f) \leq n = \dim(E)$.

$$v) \quad rg(f) = \dim(Im(f)) = rg(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Proposition

Soient E et F deux K -e.v de dimension finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et B une base de E .

- i) f injective $\iff f(B)$ est libre dans $F \iff rg(f) = \dim E$
 ii) f surjective $\iff f(B)$ génératrice de $F \iff rg(f) = \dim F$.
 iii) f bijective $\iff f(B)$ est une base de $F \iff \dim E = \dim F = rg(f)$.

Théorème

Soient E et F deux K -e.v de dimension finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F .
 2) E et F sont isomorphes (il existe un isomorphisme entre les deux) si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Théorème

- 1) Soient E et F deux K -e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 Si V un supplémentaire de $\ker f$ dans E ($E = \ker f \oplus V$). Alors V et $Im f$ sont isomorphes.

l'application $\tilde{f}: V \rightarrow Im f$ est un isomorphisme.
 $x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x)$

- 2) Soient E un K -e.v, G , F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E , tels que

$$\begin{cases} E = G \oplus F_1 \\ E = G \oplus F_2 \end{cases} \quad \text{alors } F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont isomorphes.}$$

Théorème du rang

Soient E et F deux K -e.v tels que $\dim(E) < \infty$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) \iff \dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$$

Remarque

Soient E et F deux K -e.v de dimension finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) $rg(f) \leq \dim(E)$ et $rg(f) \leq \dim(F)$, d'où

$$rg(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F)).$$

2) $rg(f) = \dim(F) \iff Im(f) = F \iff f$ est surjective.

3) $rg(f) = \dim(E) \iff ker(f) = \{0_E\} \iff f$ est injective.

Corollaire

Soient E et F deux K -e.v de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}.$$

Hyperplan

Définition

Soit E un K -e.v et H un s.e.v. de E .

On dit que H est **hyperplan** de E si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\iff$ Il existe une forme linéaire non nulle $\varphi : E \rightarrow IK$ telle que $H = ker(\varphi)$.

Théorème

Soient E un IK -e.v et H un sous e.v. de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) H est un **hyperplan**

ii) Il existe une **droite vectoriel** D (c. à d. $\dim(D) = 1$) tel que

$$E = D \oplus H$$

Corollaire

Soit E un K -e.v de dimension finie et H un sous e.v. de E . Alors H est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n - 1 = \dim(E) - 1$.

Proposition

Soit E un K -e.v f et g deux formes linéaires non nulles sur E . Alors

$ker(f) = ker(g) \iff$ il existe $\lambda \in IK^*$ tel que $g = \lambda f$.

Matrice

Transposé

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(IK)$, On appelle **transposé** de A , la matrice notée ${}^tA$, définie par

$${}^tA = (a_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Soient A, B deux matrices et $\lambda \in IK$, alors on :

i) ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB \iff$ l'application Transposé est linéaire sur $M_n(IK)$.

ii) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

iii) Si P est une matrice inversible, alors ${}^tP$ est inversible et $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

Trace

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(IK)$, On appelle **trace** de A , l'élément de IK noté $tr(A)$ et défini par :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Soient A, B deux matrices et $\lambda \in IK$, alors on :

- i) $tr(\lambda A + B) = \lambda tr(A) + tr(B) \iff$ l'application trace est linéaire sur $M_n(IK)$.
- ii) $tr(AB) = tr(BA)$.
- iii) $\forall P \in GL_n(IK), tr(PAP^{-1}) = tr(A)$.
- iv) $tr({}^t A) = tr(A)$.

Définition

- 1) Soient A et $B \in M_{n,p}(K)$.

On dit que les matrices A et B sont **équivalentes** s'il existe $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_p(K)$ tels que

$$A = PBQ.$$

- 2) Soient A et $B \in M_n(K)$.

On dit que les matrices A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(K)$ tels que

$$A = PBP^{-1}.$$

Formule de binôme pour les matrices

Soient A et B deux matrices telles que $AB = BA$, alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k A^k B^{n-k}$$

Rang d'une matrice

On appelle **rang** d'une matrice $A \in M_{n,p}(K)$ et on note $rg(A)$ c'est le rang de ses vecteurs colonnes ou de ses vecteurs lignes.

- 1) i) Soit $A \in M_{n,p}(K)$, alors $rg(A) \leq \min(n, p)$.
- ii) $rg(A) = rg({}^t A)$.
- 2) Soit $A \in M_n(K)$, alors

$rg(A) = n$ si et seulement si A est inversible.

- 3) • Si $A \in M_{n,p}(K)$ et $P \in GL_n(K)$, alors $rg(PA) = rg(A)$.
- Si $A \in M_{n,p}(K)$ et $Q \in GL_p(K)$, alors $rg(AQ) = rg(A)$.
- Si $A \in M_{n,p}(K)$, $Q \in GL_p(K)$ et $P \in GL_n(K)$, alors $rg(QAP) = rg(A)$.

Opérations conservant le rang

- 1) Echanger deux lignes ($L_i \longleftrightarrow L_j$.)
- 2) Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul α ($L_i \leftarrow \alpha L_i$.)
- 3) Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ($L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$)

Remarque

Soit $A \in M_{n,p}(K)$.

- 1) Toute opération élémentaire effectuée sur les lignes de A correspond à une multiplication à gauche de A par une matrice inversible $P \in GL_n(K)$.

Exp : L'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ revient à multiplier à gauche A par la matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$ (inversible) avec $E_{i,j}$ est la matrice avec des zéros partout sauf le terme situé à la i -ème ligne et j -ième colonne.

2) Toute opération élémentaire effectuée sur les colonnes de A correspond à une multiplication à droite de A par une matrice inversible $Q \in GL_p(K)$.

Exp : L'opération $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ revient à multiplier à droite A par la matrice $T_{i,j}(\alpha)$.

Théorème

Soit $A \in M_{n,p}(K)$.

$rg(A) = r \iff$ il existe $Q \in GL_p(K)$ et $P \in GL_n(K)$ tel que

$$QAP = J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p} \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux IK -ev tels que $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.

On considère $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On appelle **matrice de f relativement aux bases B et B'** et on note $M(f, B, B') \in M_{p,n}(IK)$ dont la j -ième colonne est formée par les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B' .

$$M(f, B, B') = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_p \end{matrix}$$

Conséquence.

On note $mat(M(f, B, B')) = M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$, alors

$$\forall 1 \leq j \leq n, f(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} e'_i.$$

Soient $x \in E$ et $y = f(x)$. On pose $X = M(x, B)$ et $Y = M(y, B')$, alors l'écriture $y = f(x)$ se traduit matriciellement sous la forme

$$Y = MX.$$

Proposition

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de bases respectives B_1, B_2, B_3 .

i) Soient $f, g : E \rightarrow F$ et $\lambda \in IK$, alors

$$M(\lambda f + g, B_1, B_2) = \lambda M(f, B_1, B_2) + M(g, B_1, B_2).$$

ii) $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires, alors

$$M(g \circ f, B_1, B_3) = M(g, B_2, B_3) M(f, B_1, B_2).$$

iii) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

f est un **isomorphisme SSI** $M(f, B_1, B_2)$ est **inversible** et dans ce cas on a :

$$M(f^{-1}, B_1, B_2) = (M(f, B_1, B_2))^{-1}.$$

iv) L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow M_{p,n}(IK) \\ f &\mapsto M(f, B_1, B_2) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Conséquence.

Soient E et F deux IK -e.v de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Matrice de passage entre deux bases

Soit B et B' deux bases de E , C et C' deux bases de F .

1) La matrice de passage de B à B' notée $P_{B \rightarrow B'}$ est la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$P_{B \rightarrow B'} = M(\text{Id}_E, B', B).$$

2) On note $P = P_{B \rightarrow B'}$.

Pour $x \in E$, on pose $X = M(x, B)$ et $X' = M(x, B')$, alors

$$M(x, B) = P_{B \rightarrow B'} M(x, B') \iff X = PX'$$

3) On considère $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et on pose $A = M(f, B, C)$, $A' = M(f, B', C')$, $P = P_{B \rightarrow B'}$ et $Q = P_{C \rightarrow C'}$, alors on a :

$$M(f, B', C') = P_{C' \rightarrow C} M(f, B, C) P_{B \rightarrow B'} \iff A' = Q^{-1}AP.$$

En particulier si $f \in \mathcal{E}$, alors

$$M(f, B') = P_{B' \rightarrow B} M(f, B) P_{B \rightarrow B'} \iff A' = P^{-1}AP$$

Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ($\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$).

On appelle rang de f et on note $rg(f)$ c'est le $rg(M(f, B, B'))$ où B et B' sont deux bases quelconques respectives de E et F .

$$rg(f) = rg(f, B, B').$$

Trace d'un endomorphisme

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie.

On définit la trace d'un endomorphisme f et on note $tr(f)$ c'est la trace d'une matrice de f relativement à une base quelconque de E .

$$tr(f) = tr(M(f, B)) \text{ ou } B \text{ est une base qcq de } E.$$

Trace d'un projecteur

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie ($\dim(E) = n$) et p un projecteur de E .

On pose $r = rgp = \dim(\text{Imp})$ et on considère $B = B_1 \cup B_2$ une base de E adaptée à la décomposition

$$E = \ker p \oplus \text{Imp}.$$

$B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de Imp et $B_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker p$, alors

$$M(p, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$tr(p) = M(p, B) = r$$

c. a.d

La trace d'un projecteur dans un espace vectoriel de dimension finie est égale à son rang.