

Déterminant d'une matrice et d'un endomorphisme

On considère E un IK -e.v avec $\dim E = n$ et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E

	Définition	Propriétés et applications
Permutation	- Une permutation est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, n\}$, notée $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ - L'ensemble des permutations sera noté S_n - une transposition est permutation notée $\tau_{i,j}$ ($i \neq j$) qui permute i et j et garde les autres fixes $\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$	- Toute permutation σ de S_n s'écrit sous la forme $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_n$ où τ_i est une transposition - La signature d'une permutation σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nombre de transposition}}$
Déterminant d'une famille de vecteurs	Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E tels que les composantes de v_j dans la base B sont $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$, alors $\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$	$(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est liée $\iff \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$. $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre $\iff \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$. $\det_B(\lambda v_1, v_2, \dots, v_n) = \lambda \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)$. $\det_B(\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n) = \lambda^n \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)$. - Si on échange la position de deux vecteurs, on ajoute un signe $- \iff$ $\det_B(v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, \dots, v_j, v_i, \dots, v_n) = -\det_B(v_1, v_2, \dots, v_j, v_i, \dots, v_n)$

		• $\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est linéaire par rapport à chaque variable $\iff$ $\forall 1 \leq i \leq n$ $\det_B(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \det_B(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + \det_B(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ • On ne modifie pas $\det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)$ si on ajoute à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres. $\det_B(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i + \sum_{k \neq i} \alpha_k v_k, v_{i+1}, \dots, v_n) = \det_B(v_1, v_2, \dots, v_n)$
Déterminant d'une matrice carrée	Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(IK)$, Le déterminant de A est le déterminant de ses vecteurs colonnes.	• $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ • $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ • $\forall k \in \mathbb{N}, \det(A^k) = (\det(A))^k$. • $\det(A) = \det({}^t A)$
Développement suivant une rangée	On appelle mineur d'indice (i, j) et on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne. • Développement selon la j-ième colonne $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ • Développement selon la i-ième ligne. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$	• On utilise cette méthode après avoir fait apparaître sur une même rangée (ligne ou colonne) le maximum possible de zéros. • Si A contient une ligne nulle ou bien une colonne nulle, alors $\det(A) = 0$. • Si T est une matrice triangulaire ou diagonale $T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ alors}$ $\det(T) = \prod_{i=1}^n a_{i,i} = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$ • $\det(I_n) = 1 \quad \det(\lambda I_n) = \lambda^n$.

Formule de l'inverse d'une matrice	A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$	• $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)$. - avec $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ • Si A et B sont semblables ($A = P^{-1}BP$), alors $\det(A) = \det(B)$
Propriétés élémentaires	• $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$. • Méthode de Sarrus. $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$ $= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$	• Si A est triangulaire par blocs $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = \det(B)\det(C)$. • Si $M = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ 0 & A_2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{pmatrix}$, alors $\det(M) = \det(A_1)\det(A_2)\dots\det(A_n)$
Déterminant d'un endomorphisme	Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme $\det(f) = \det_B(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) = \det(M(f, B))$	• Puisque deux matrices semblables ont même déterminant, alors le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie. • $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$. • f automorphisme $\iff \det(f) \neq 0$. - Si f est un automorphisme, alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ • $\forall \lambda \in IK, \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$