

Autour du rang d'une matrice

Partie I "Un résultat préliminaire".

Soient $IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F et G deux IK -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On considère u une application linéaire de F vers G de rang $r \in \mathbb{N}^*$

1. a) Justifier l'existence d'un sous espace vectoriel F_1 de F tel que $F = F_1 \oplus \ker u$.
- b) On considère l'application

$$\begin{aligned} v : F_1 &\longrightarrow \operatorname{Im}(u) \\ x &\longmapsto v(x) = u(x) \end{aligned}$$

Montrer que v est un isomorphisme.

2. On suppose que $0 < r < \min(m, p)$ et on considère $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F telle que $(e_1, \dots, e_r)$ soit une base de F_1 et $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ soit une base de $\ker u$. On pose pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ $\varepsilon_i = v(e_i)$.
 - a) Montrer qu'il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_m)$ de vecteurs de G telle que la famille $B' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ soit une base de G .
 - b) Déterminer $\operatorname{Mat}_{B, B'}(u)$, la matrice de u relativement à aux bases B et B' .
3. En déduire que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{m,p}(IK)$, si $0 < \operatorname{rg}(M) = r < \min(m, p)$, alors il existe deux matrices inversibles $S \in \mathcal{GL}_m(IK)$ et $T \in \mathcal{GL}_p(IK)$ telle que $M = S J_{m,p,r} T$ avec $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_r la matrice identité de $\mathcal{M}_r(IK)$.

Partie II

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $R \in GL_n(\mathbb{C})$, On définit

$$\sigma_R(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}^*, \lambda R - M \text{ n'est pas inversible}\}$$

$$Sp(M) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I_n - M \text{ n'est pas inversible}\}.$$

1. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $R \in GL_n(\mathbb{C})$, on a :
 - a) $\sigma_R(M) = Sp(R^{-1}M) \cap \mathbb{C}^*$.
 - b) $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(R^{-1}M)$.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg}(M) = r$.

On admet que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma_R(M)$ est un ensemble fini et que $\operatorname{card}(\sigma_R(M)) \leq r$.

 - a) Montrer qu'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PDQ$ avec $D = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, r, 0, \dots, 0)$.
 - b) Montrer que $\operatorname{card}(\sigma_{PQ}(M)) = r$.
 - c) Montrer que $\max_{R \in GL_n(\mathbb{C})} (\operatorname{card}(\sigma_R(M))) = \operatorname{rg}(M)$.
3. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible telle que $\operatorname{rg}(M) = r$.
 - a) Montrer qu'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PNQ$ où $N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec

$$\begin{cases} n_{ij} = 1 & \text{si } j = i + 1 \text{ et } i \leq r \\ n_{ij} = 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- b) Montrer que $\sigma_{PQ}(M) = \emptyset$.
4. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $M \notin GL_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\min_{R \in GL_n(\mathbb{C})} (\operatorname{card}(\sigma_R(M))) = 0$.

Partie III

Soit $f \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$ un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.

- On dit que f conserve le rang si $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \text{rg}(f(M)) = \text{rg}(M)$.
- On dit que f conserve l'inversibilité si $\forall M \in GL_n(\mathbb{C})$ on a $f(M) \in GL_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si f conserve le rang, alors f conserve l'inversibilité.

On suppose dans la suite que f conserve l'inversibilité.

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible
 - a) Soit $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda R - M \in GL_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $\lambda f(R) - f(M) \in GL_n(\mathbb{C})$.
 - b) En déduire que $f(M)$ est non inversible
3. Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$,
 $M \in GL_n(\mathbb{C}) \iff f(M) \in GL_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $M \in \ker(f)$.
En remarquant que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $f(\lambda R - M) = \lambda f(R)$, montrer que $\text{rg}(M) = 0$, puis $M = 0$.
5. Déduire que f est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.
6. Montrer que f^{-1} conserve l'inversibilité.